Mécanique : Cinématique du point

La mécanique est le domaine de tout ce qui produit ou transmet un mouvement, une force, une déformation : machines, moteurs, véhicules, organes (engrenages, poulies, courroies, vilebrequins, arbres de transmission, pistons, etc.).

La cinématique étudie les mouvements des corps.

Au premier chapitre, nous définirons les grandeurs physiques nécessaires à la description des mouvements. Au deuxième chapitre, nous étudierons les mouvements rectilignes.

Chapitre 1 : Position. Vitesse. Accélération

1. Référentiel. Repère

a) Cinématique du point

La **cinématique** est l'étude du mouvement des corps.

Nous ne considérerons que des corps de faibles dimensions de sorte qu'ils seront toujours assimilables à un point appelé "**le mobile**".

Les **grandeurs physiques** de la cinématique sont **le temps, la position, la vitesse et l'accélération**.

"**Etudier le mouvement**" veut dire :

1) Trouver l'équation de la trajectoire du mobile.
2) Trouver la relation mathématique (= équation) entre vitesse et temps.
   (Connaissant cette relation on peut calculer la vitesse du mobile à n'importe quel instant, ou bien l'instant correspondant à n'importe quelle vitesse.)
3) Trouver la relation entre position et temps.
   (Connaissant cette relation on peut calculer la position du mobile à n'importe quel instant, ou bien l'instant correspondant à n'importe quelle position.)
4) Trouver la relation entre vitesse et position.
   (Connaissant cette relation on peut calculer la vitesse du mobile à n'importe quelle position, ou bien la position pour n'importe quelle vitesse.)

b) La description du mouvement n'est pas la même dans tous les référentiels

La description d'un mouvement se fait par rapport à un corps (ou un système de plusieurs corps immobiles les uns par rapport aux autres), choisi comme référence, appelé **référentiel**.

Voici quelques référentiels couramment utilisés :

Terre (avec tous les corps en repos par rapport à la Terre : salle de classe,...) ;

masse d'air en mouvement par rapport à la Terre ;

train, voiture, avion en mouvement par rapport à la Terre ;

système formé par le centre de la Terre et trois étoiles fixes (= référentiel géocentrique).

Exemple *Deux voyageurs A et B sont assis dans un wagon en mouvement. Le voyageur A observe B et conclut : B est immobile. Le chef de gare C se trouvant sur le quai où passe le train, observe B et conclut : B est en mouvement.*

Ces deux observations sont-elles contradictoires ?

Non, car elles sont faites dans deux référentiels différents : A fait ses observations dans le référentiel du wagon, C fait ses observations dans le référentiel lié à la Terre.

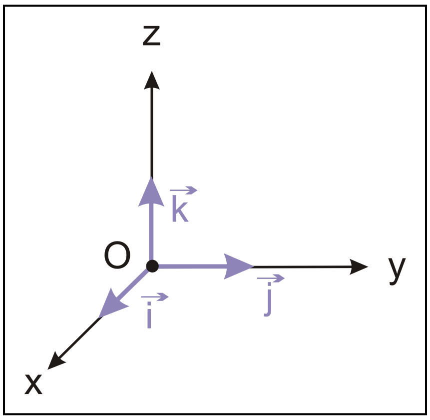
Exemple *La Tour Eiffel est immobile dans le référentiel terrestre, mais décrit un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique. (Quel est le rayon de la trajectoire ?)*

Pour décrire mathématiquement les caractéristiques d'un mouvement, un observateur utilise un **repère** (repérage de la position) et une **horloge** (mesure du temps) liés au référentiel d'observation.
Un repère est déterminé par une **origine O** et par une **base.** Le plus souvent la base est **orthonormée :** le repère est alors appelé **repère cartésien** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$!

Les axes Ox et Oy perpendiculaires entre-eux, forment un plan. L'axe Oz est perpendiculaire à ce plan.

Souvent le mouvement se déroule dans un plan et un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à 2 dimensions définissant ce plan suffit.

Si le mouvement est rectiligne, un seul axe Ox parallèle au mouvement suffit. Ce sera le cas des mouvements rectilignes étudiés au chapitre suivant.



c) Le temps (t) est une grandeur physique fondamentale

Dans le domaine des sciences comme dans la vie courante, le temps intervient de deux manières :

1) La **durée** ou l'**intervalle de temps** qui s'écoule entre deux **événements**.
2) La **date** ou l'**instant** auquel un événement a lieu.

Pour exprimer une date il est nécessaire de définir une **origine des temps t_0** : il faut choisir un événement et lui attribuer conventionnellement la date "zéro" ($t_0 = 0$).
Les événements qui se sont produits avant l'instant t_0 ont des dates $t < 0$.
Les événements qui se sont produits après l'instant t_0 ont des dates $t > 0$.

Toute durée est une différence de deux dates, et est donc indépendante de l'origine des temps ! Si deux événements se produisent à des instants t_1 et $t_2 > t_1$, alors l'intervalle de temps (ou la durée) entre ces événements est $t_2 - t_1 > 0$.

Le temps est mesuré à l'aide d'**horloges**. On utilise comme horloges, soit des phénomènes naturels, soit des événements artificiels qui se reproduisent régulièrement, à des intervalles de temps successifs égaux. Tels sont l'alternance du jour et de la nuit, le mouvement du balancier d'une pendule ou d'une montre, l'oscillation électrique dans un cristal de quartz (montres électroniques). L'horloge est d'autant plus précise que le phénomène utilisé est plus régulier.

L'**unité S.I.** (Système International d'unités) du temps est **la seconde (s)**.

A condition que la vitesse du référentiel soit largement inférieure à la vitesse de la lumière ($v < 0,1 \cdot c$), l'écoulement du temps se fait de la même façon quel que soit le choix du référentiel et du repère. (Point de vue de la physique **"**classique**"**)

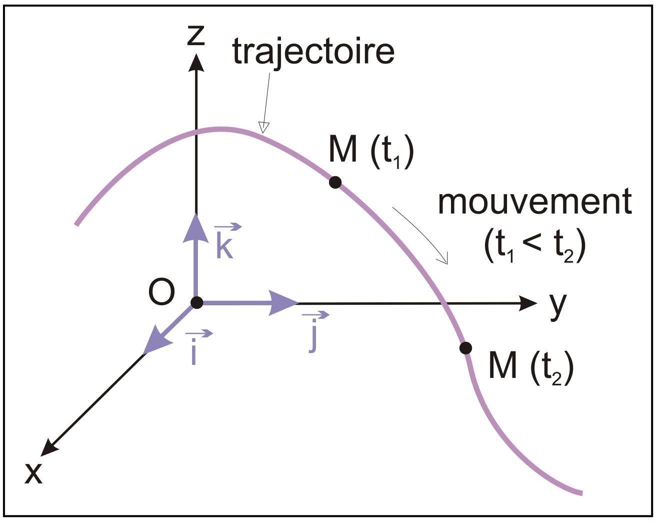
Exemple *Deux cyclistes A et B roulent côte à côte à la vitesse de 30 km/h. Subitement A accélère et B constate qu'au bout de 3 s, A a pris une avance de 10 m.*
Un piéton C au bord de la route et ayant tout observé conclut de même que B, qu'il a fallu 3 s pour que A prenne une avance de 10 m sur B.
La durée entre les deux événements "A commence à accélérer" et "A a une avance de 10 m" vaut 3 s aussi bien dans le référentiel de B que dans celui de C.

d) La trajectoire du point dépend du référentiel

La trajectoire est l'ensemble des positions successives occupées par le mobile M lors de son mouvement.

Elle est représentée par une courbe dans l'espace. Comme toute courbe, la trajectoire est déterminée, dans un repère donné, par son équation mathématique.

La forme de la trajectoire dépend du référentiel choisi.

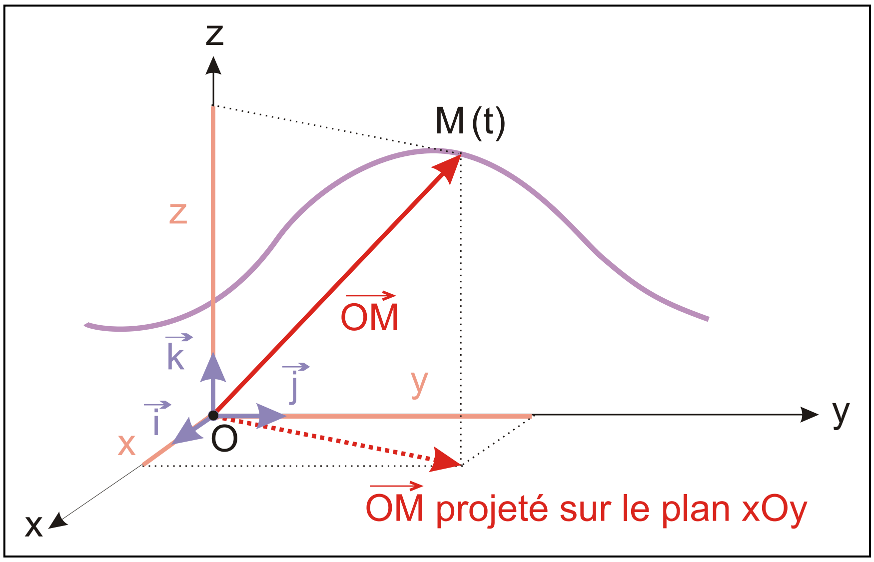


2. Position d'un mobile

a) Vecteur position et coordonnées cartésiennes

Soit M le mobile et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère choisi. La position de M à chaque instant est repérée par les **coordonnées** (ou **composantes**) x, y, z du **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$.

Mathématiquement : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

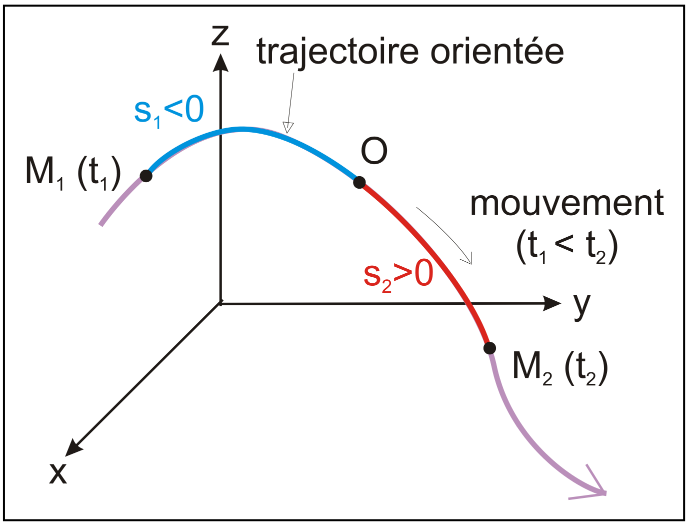


Si le repère est orthonormé x, y, z sont appelés **coordonnées cartésiennes** du point M.

S'il y a mouvement les coordonnées x, y, z varient dans le temps. Les fonctions x = f(t), y = g(t) et z = h(t) sont appelées **équations horaires** du mouvement. Le mouvement d'un point M est parfaitement connu si on connaît ces équations horaires !

Exemple : Sachant que $x = 2t$, $y = 4t^2+3$, $z = 0$, *on peut calculer la position de M pour tout instant t.*

b) Abscisse curviligne



Si la trajectoire d'un mobile M est connue, on peut l'orienter et choisir un point origine O. La valeur algébrique de l'arc $\overset{\frown}{OM}$ est l'abscisse curviligne s du point M.

* s > 0 si en allant de O à M on se déplace dans le sens de l'orientation.
* s < 0 si en allant de O à M on se déplace dans le sens inverse de l'orientation.

Le bon sens impose qu'on oriente la trajectoire dans le sens du mouvement.

Le déplacement (positif) d'un mobile se trouvant initialement en M_1 (abscisse curviligne s_1) à l'instant t_1 et arrivant en M_2 (abscisse curviligne s_2) à l'instant t_2, est évidemment :

$$\boxed{|\Delta s| = |s_2 - s_1|}$$

Δs est indépendant de l'origine O !

Exemple *Sur une carte routière, la « distance » entre deux villes ne représente en fait rien d'autre que l'abscisse curviligne d'une ville avec l'origine placée sur l'autre ville.*

Attention : Ces « distances routières » ne correspondent pas du tout aux distances au sens mathématique (en ligne droite).

Ainsi, si la cathédrale de Luxembourg sert d'origine O, l'église de Bertrange se situe à une abscisse curviligne s = 7 km suivant le chemin routier le plus court. La distance au sens mathématique entre ces deux points par contre ne vaut que 5 km.

Un piéton situé sur la trajectoire à s' = 5,5 km doit se déplacer de Δs = 1,5 km pour gagner l'église de Bertrange (en suivant la trajectoire préalablement fixée).

S'il y a mouvement s varie au cours du temps. La relation s = f(t) est appelée **équation horaire** du mouvement. Elle détermine complètement le mouvement de M.

Exemple *Connaissant la trajectoire, le sens + et l'origine O, et sachant que s = 2500 + 15t on détient toutes les informations au sujet de ce mouvement !*

Remarque On note usuellement par Δx la différence « valeur finale de la grandeur x » moins « valeur initiale de la grandeur x » : $\Delta x = x_{final} - x_{initial}$

Ainsi $\Delta s < 0$ si le mouvement se fait dans le sens négatif de la trajectoire ! Si l'on veut que le déplacement soit positif, on n'a qu'à prendre la valeur absolue de Δs !

3. Vitesse d'un mobile

La rapidité avec laquelle un mobile change de position est indiquée par sa vitesse. On distingue vitesse moyenne et vitesse instantanée.

a) Vitesse moyenne v_m

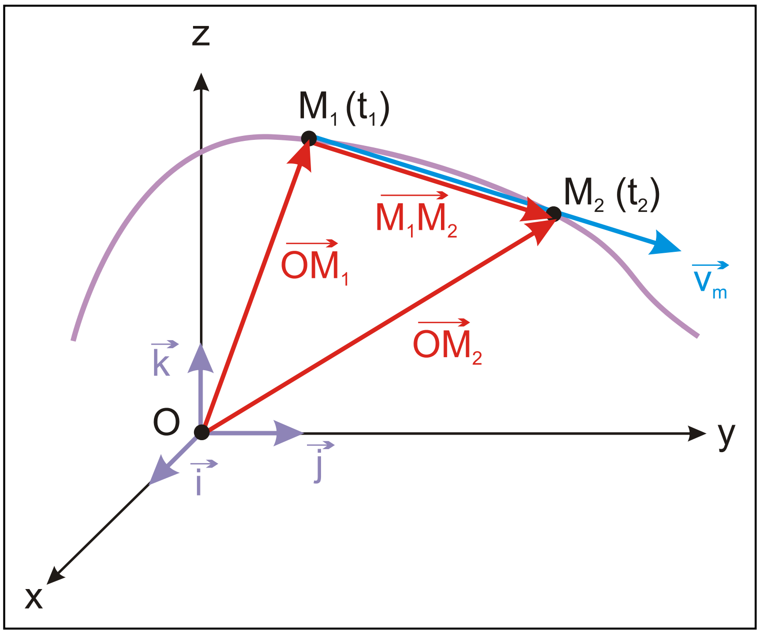
Tout le monde sait que la vitesse moyenne est le déplacement (positif) divisé par la durée. Si un mobile passe par un point M_1 (abscisse curviligne s_1) à l'instant t_1 et par un pointM_2 (abscisse curviligne s_2) à l'instant $t_2 > t_1$, la vitesse moyenne au cours du déplacement de M_1 vers M_2 s'écrit :

$$\boxed{v_m = \frac{|s_2 - s_1|}{t_2 - t_1} = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} > 0}$$

(formule à retenir)

b) Vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_m$

Soient M_1 la position du mobile à l'instant t_1 et M_2 celle à l'instant $t_2 > t_1$.



Définitions Vecteur déplacement : $\overrightarrow{M_1M_2}$

Vecteur vitesse moyenne : $\vec{v}_m = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$

Sur la figure on voit que : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \Delta\overrightarrow{OM}$

Comme $t_2 - t_1 = \Delta t$, on a finalement : $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$

Remarque Nous n'utiliserons jamais le vecteur vitesse moyenne. Il ne nous sert qu'à introduire le vecteur vitesse instantanée !

c) Vitesse instantanée v

La vitesse instantanée est la vitesse du mobile **à un instant** !

Si au cours d'un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, la vitesse ne varie pas d'un instant à l'autre, c.–à–d., qu'elle est constante, il est évident que pour cet intervalle de temps, la vitesse instantanée à chaque instant est égale à la vitesse moyenne $\Leftrightarrow$ si v constant alors $v = v_m$

Si par contre, la vitesse varie d'un instant à l'autre (cas général), la vitesse instantanée s'obtient en réduisant l'intervalle de temps Δt autant, **pour qu'on puisse admettre que la vitesse ne varie plus au cours de cet intervalle de temps**. Ceci veut dire que

la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne au cours d'un intervalle de temps très petit.

Le déplacement ayant lieu au cours d'une durée très petite, est également très petit.

$$\boxed{v = \frac{|\Delta s|_{petit}}{\Delta t_{petit}} = \frac{|ds|}{dt} > 0}$$

Pour indiquer que l'intervalle de temps est extrêmement petit, il n'est plus noté Δt mais dt. De même, le déplacement $|\Delta s|$ ayant lieu au cours de la durée dt très petite, est également très petit, et est noté $|ds|$.

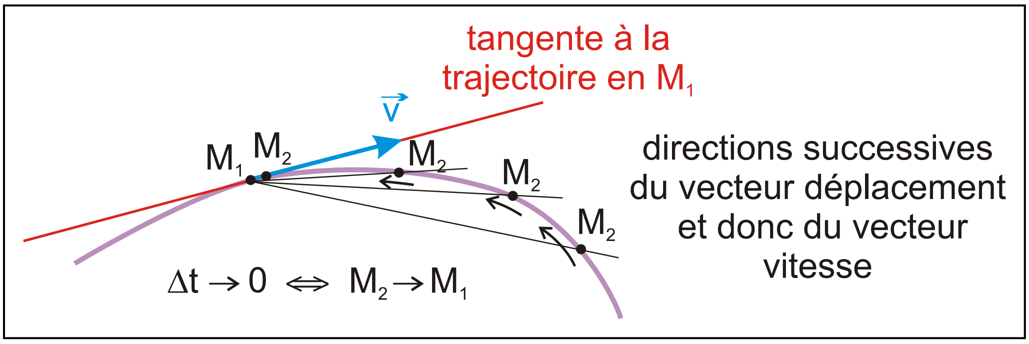
d) Vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ s'exprime par la relation :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}_{petit}}{\Delta t_{petit}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

* **Direction et sens de $\vec{v}$**

Lorsque Δt devient très petit, t_2 **tend vers** t_1, et M_2 **tend vers** M_1. La norme du vecteur déplacement **tend vers** zéro, et sa direction **tend vers** la tangente à la trajectoire au point M_1. Son sens reste orienté de M_1 vers M_2 = sens du mouvement.



Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ est à chaque instant tangent à la trajectoire. Son sens est celui du mouvement.

* **Intensité (norme, module) de $\vec{v}$**

Elle est notée v et indique la valeur de la vitesse instantanée. $\boxed{v = \frac{|ds|}{dt}}$

Dans le cas du mouvement uniforme $v = v_m$.

L'unité S. I. de la vitesse est le m/s.

1 m/s = 3,6 km/h

En général lorsqu'il y a mouvement, v varie dans le temps. Cette variation s'exprime mathématiquement par la fonction v(t).

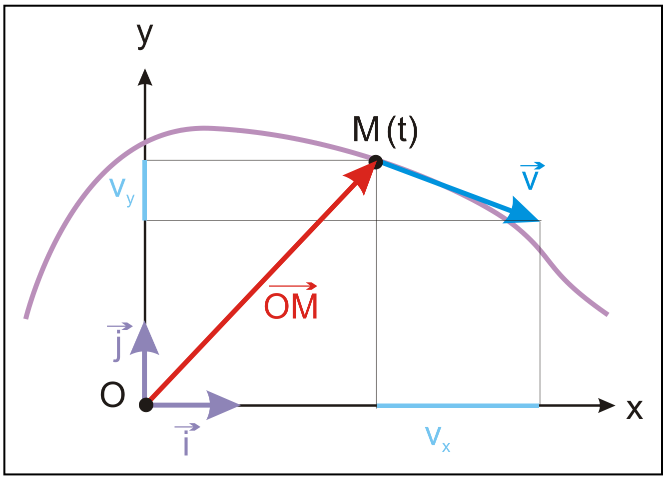
Exemple : v(t) = 3t+5. Cela veut dire que v augmente de 3 m/s chaque seconde, et qu'à l'origine des temps la vitesse fut 5 m/s.

d) Coordonnées du vecteur vitesse instantanée

Dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{v}$ s'exprime par : $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$.

L'intensité v est donnée par la relation de Pythagore : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Mouvement plan : $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ et $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$



Dans l'exemple de la figure : $v_x > 0$ et $v_y < 0$

Exemple : $v_x = 4$ m/s et $v_y = -3$ m/s, alors $v = 5$ m/s.

4. Accélération

Lorsque la vitesse $\vec{v}$ d'un mobile varie, on aimerait connaître la rapidité avec laquelle elle varie. C'est justement l'accélération $\vec{a}$ du mobile qui comporte cette information !

L'accélération $\vec{a}$ (= vecteur accélération) indique de combien la vitesse $\vec{v}$ (= le vecteur vitesse) varie en 1 seconde. **Attention : $\vec{v}$ peut varier en intensité et en direction !**

Une forte accélération a (forte intensité du vecteur accélération) signifie que la vitesse varie vite. Une faible accélération signifie qu'elle varie lentement. L'accélération $\vec{a}$ indique donc la **rapidité de variation de la vitesse** $\vec{v}$.

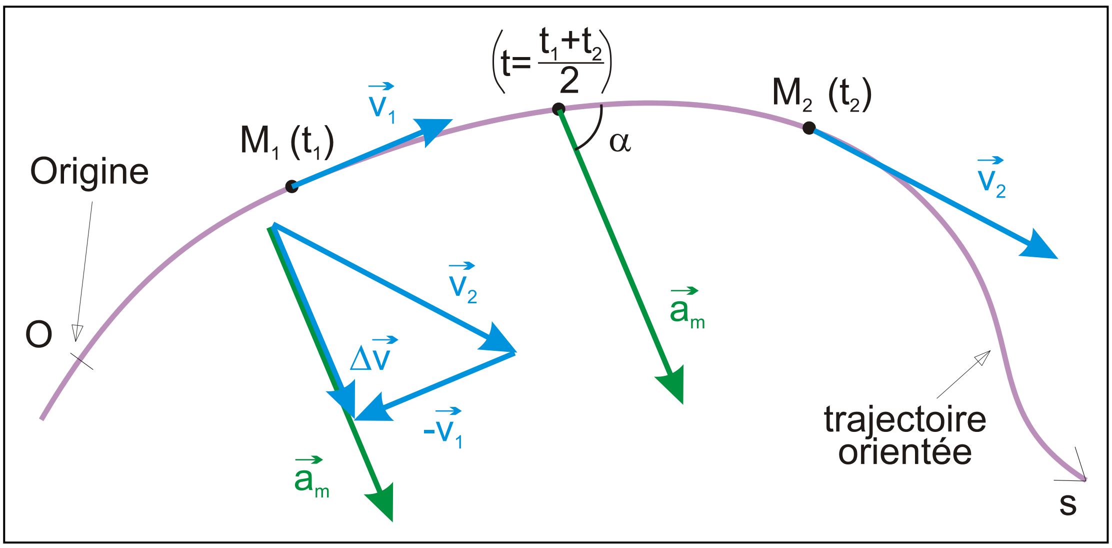
Exemples

*	Mouvement rectiligne uniforme	$\Rightarrow$	$\vec{v}$ ne varie pas
		$\Rightarrow$	$\vec{a} = \vec{0}$
*	Mouvement uniforme mais non rectiligne	$\Rightarrow$	$\vec{v}$ varie en direction; par contre v (intensité de $\vec{v}$) reste constant
		$\Rightarrow$	$\vec{a} \neq \vec{0}$
*	Mouvement rectiligne mais non uniforme	$\Rightarrow$	v varie; par contre la direction de $\vec{v}$ reste constante
		$\Rightarrow$	$\vec{a} \neq \vec{0}$

On distingue l'accélération moyenne $\vec{a}_m$ au cours d'un intervalle de temps Δt, et l'accélération instantanée $\vec{a}$ à un instant donné.

a) Accélération moyenne

* Le mobile M devient de plus en plus rapide



A l'instant t_1, le mobile se trouve en M_1 avec la vitesse $\vec{v}_1$.

A l'instant t_2, le mobile se trouve en M_2 avec la vitesse $\vec{v}_2$.

Au cours de l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, la vitesse varie de $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, et l'accélération moyenne $\vec{a}_m$ vaut :

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$ **(formule à retenir)**

$\vec{a}_m$ est appliqué au point où le mobile se trouve à l'instant t égal au milieu de l'intervalle Δt.

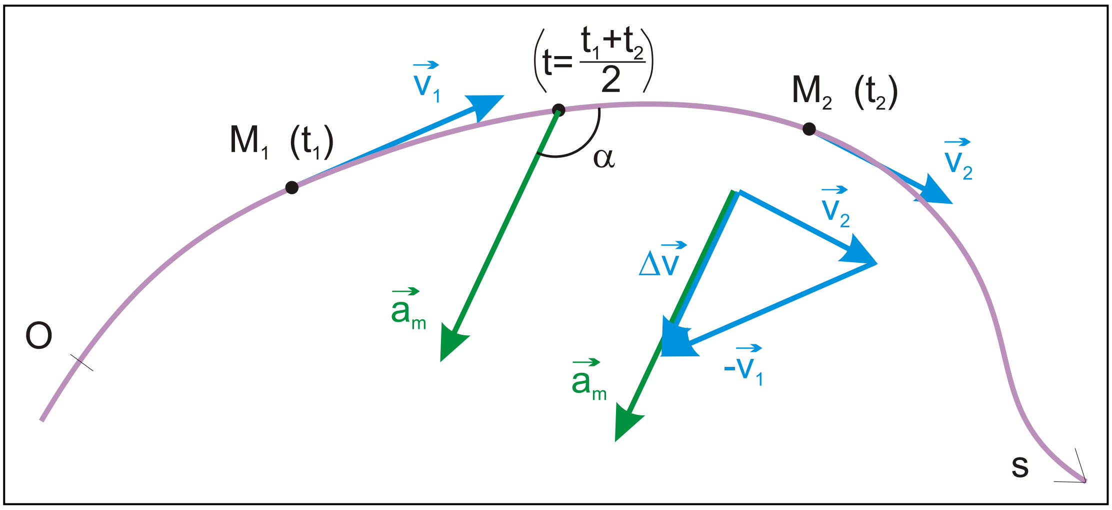
On a : $t = t_1 + \frac{\Delta t}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2}$.

On voit que l'angle α que fait $\vec{a}_m$ avec la vitesse au point M est un angle aigu.

L'intensité de $\vec{a}_m$, notée a_m, est égale à l'intensité de $\Delta\vec{v}$ divisée par Δt.

Remarque En physique, l'intensité d'un vecteur $\vec{u}$ est généralement noté u.
En mathématiques, l'intensité d'un vecteur $\vec{u}$ (= norme de $\vec{u}$) est notée $\|\vec{u}\|$.
Dans notre cas, $\Delta v = v_2 - v_1$ (différence des intensités !) est différent de l'intensité de $\Delta\vec{v}$ (voir figures !).
Par conséquent, l'intensité de $\Delta\vec{v}$ doit être notée exceptionnellement $\|\Delta\vec{v}\|$.
L'intensité de $\vec{a}_m$ s'écrit alors : $\boxed{a_m = \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t}}$ **(formule à retenir)**

* Le mobile M devient de plus en plus lent



Les formules sont exactement les mêmes. On voit que l'angle α que fait $\vec{a}_m$ avec la vitesse au point M est un angle obtus.

b) Accélération instantanée

L'accélération instantanée $\vec{a}$ du mobile s'obtient en réduisant l'intervalle de temps Δt tellement que l'accélération ne puisse plus varier.

L'accélération instantanée $\vec{a}$ est donc égale à l'accélération moyenne $\vec{a}_m$ au cours d'un intervalle de temps très petit, noté dt. La très faible variation de la vitesse $\Delta\vec{v}$ est notée $d\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Si l'accélération $\vec{a}$ **est constante** (approximation très fréquente), alors $\vec{a} = \vec{a}_m$.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$ et l'intensité de $\vec{a}$ est : $$\boxed{a = \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t}}$$

5. Notations et vocabulaire

Un **vecteur** est noté avec une petite flèche. Le vecteur vitesse par exemple est noté : $\vec{v}$.

L'**intensité du vecteur** est notée sans flèche. L'intensité du vecteur $\vec{v}$ est notée v.

Les termes **intensité, module et norme** d'un vecteur sont équivalents.

L'intensité d'un vecteur est un nombre strictement positif.

Les **composantes ou coordonnées d'un vecteur** sont notées avec les indices x, y, et z. Celles du vecteur $\vec{v}$ par exemple sont notées v_x, v_y, v_z.

Elles sont les projections du vecteur sur chaque axe. Ce sont des nombres algébriques (donc positifs ou négatifs) !

Les très petites différences ne sont plus notées par « Δ » mais par « d ».

Ainsi la variation très petite de la grandeur t est notée dt et non plus Δt.

Petites questions de compréhension

1 Trouver des corps dont le mouvement est étudié avantageusement dans les différents exemples de référentiels énumérés à la page 1.

2 Donner les origines des temps couramment utilisées pour indiquer :

- les dates historiques
- les instants des buts en football
- les instants des interventions techniques lors du décollage d'une fusée
- les instants auxquelles on réalise des mesures lors d'une expérience scientifique.

3 Quelle est la forme de la trajectoire d'un point de la roue d'une bicyclette, dans chacun des référentiels suivants :

- observateur au repos au bord de la route;
- cycliste;
- roue ?

4 Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la position d'un point M est définie à chaque instant par :

$$x = 2t, \qquad y = 4t^2+3, \qquad z = 0$$

Donner les positions respectives du point M aux instants 0 s, 1 s, 2 s, 3 s, 4 s. En déduire l'équation de la trajectoire $y = f(x)$ suivie par M.

5 Convertir 60 km/h en m/s !
Convertir 20 m/s en km/h

6 Calculer la norme du vecteur vitesse instantanée sachant que ses coordonnées sont :
$v_x = 3{,}5$ m/s, $v_y = -6{,}2$ m/s, $v_z = 0$ m/s

7 Pour les 3 exemples suivants, déterminer à l'aide d'une figure le vecteur variation de vitesse $\Delta\vec{v}$, puis le vecteur accélération moyenne $\vec{a}_m$.
(Faire une figure précise : se donner une échelle pour les vecteurs vitesse, ainsi qu'une échelle pour le vecteur accélération.)
Calculer ensuite l'intensité de $\vec{a}_m$.

a) Une voiture accélère sur une route rectiligne de 30 km/h à 90 km/h en 8 s.

b) La direction de vol d'un oiseau change de 90° en 4 s. En même temps sa vitesse a passé de 5 m/s à 10 m/s.

c) Une moto prend un virage circulaire de rayon 50 m et de 30° à la vitesse constante de 80 km/h. (Les données permettent de calculer la durée du virage.)