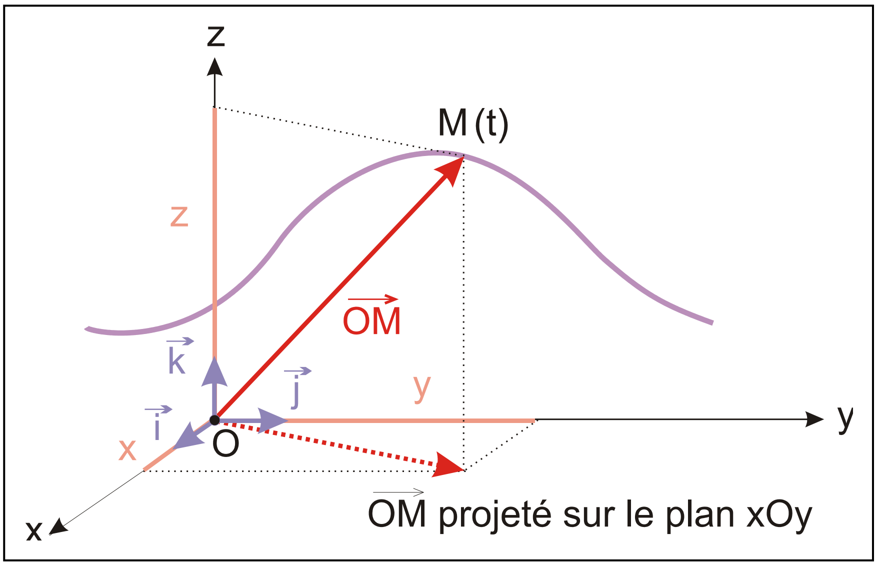
# Chapitre 1: Cinématique du Point

## 1. Position par rapport à un référentiel

### a) Repère cartésien $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (lié au référentiel)

Nous utiliserons ce repère si la trajectoire est rectiligne ou parabolique (tir oblique, ...)



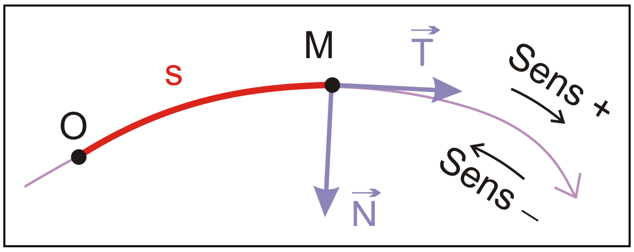

La position du mobile M est repérée par son vecteur position : $\overrightarrow{OM}$

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

### b) Repère de Frenet $(M, \vec{T}, \vec{N})$ (lié au mobile)

La trajectoire doit être connue d'avance !

Nous utiliserons ce repère si la trajectoire est circulaire/elliptique (satellites, charges dans un champ magnétique, ...)




La trajectoire est munie d'une origine O. Elle est orientée (si possible dans le sens du mouvement).

La position du mobile M est repérée par son abscisse curviligne s.

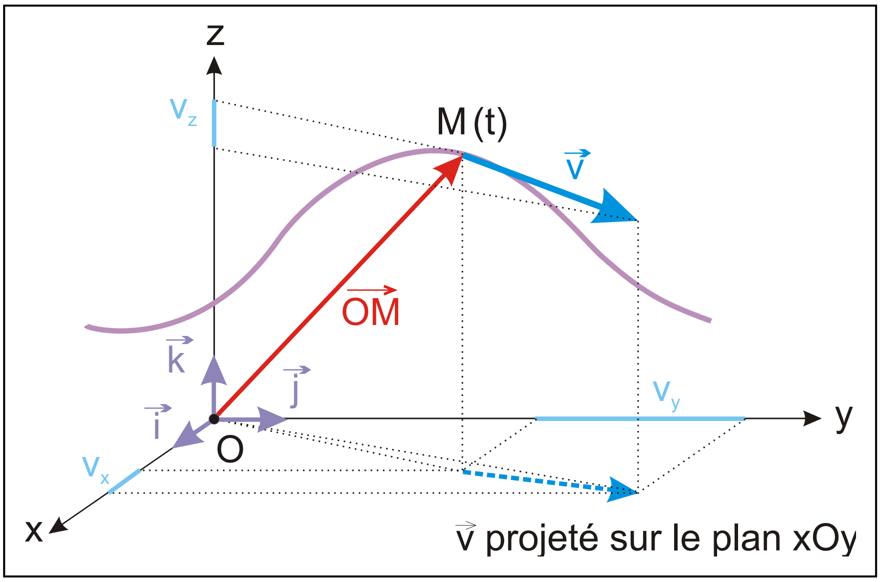
Le repère de Frenet est lié au point M. Il comporte deux vecteurs unitaires $\vec{T}$ et $\vec{N}$ :

- $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire au point M et orienté dans le sens de l'orientation de la trajectoire.
- $\vec{N}$ est perpendiculaire (= normale) à $\vec{T}$ et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

Si la trajectoire n'est pas plane on ajoute un troisième vecteur unitaire bi-normal $\vec{k}$ perpendiculaire à $\vec{T}$ et $\vec{N}$.

## 2. Vitesse par rapport à un référentiel

### a) Définition




$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}} \qquad (1)$$

La vitesse instantanée $\vec{v}$ est la dérivée de la position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

La vitesse exprime la rapidité avec laquelle la position varie.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire.

**b) Coordonnées cartésiennes**

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (3)$$

(1) et (3) $\Rightarrow$ $\vec{v} = \dfrac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad (4)$$

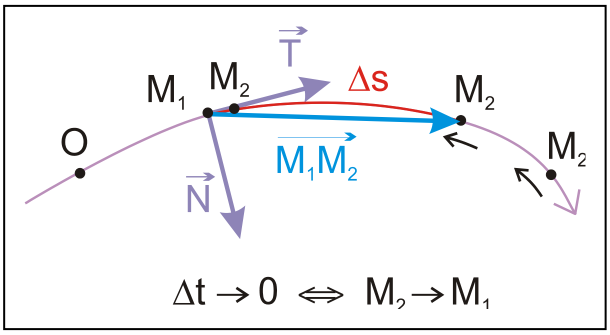
(2) et (4) $\Rightarrow$ $\boxed{v_x = \dfrac{dx}{dt} \qquad v_y = \dfrac{dy}{dt} \qquad v_z = \dfrac{dz}{dt}}$

**c) Coordonnées de Frenet**

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_T \\ v_N \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = v_T\vec{T} + v_N\vec{N}$$

Comme $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire $v_N = 0 \Rightarrow \vec{v} = v_T \cdot \vec{T}$

Définition de la vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$ avec $\Delta t = t_2 - t_1$




Si : $\Delta t \to 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \to \Delta s \cdot \vec{T} \Rightarrow \vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \vec{T}$

Finalement : $\vec{v} = \dfrac{ds}{dt}\vec{T} \Rightarrow \boxed{v_T = \dfrac{ds}{dt} \quad \text{et} \quad v_N = 0}$

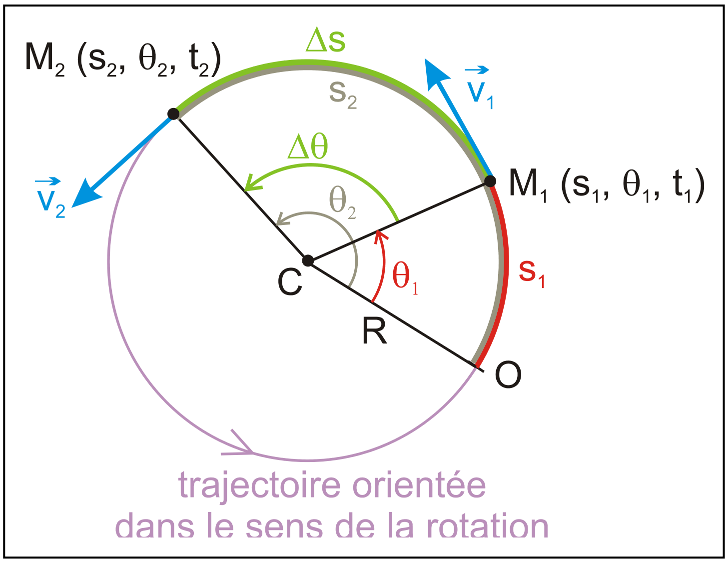
Comme $v_N = 0$, la **norme** de $\vec{v}$ vaut : $v = |v_T| = \left|\dfrac{ds}{dt}\right|$

**d) Vitesse linéaire et vitesse angulaire dans le cas du mouvement circulaire uniforme**

Un mobile M se déplace à vitesse constante v sur une trajectoire circulaire de rayon R.

Origine des temps et des espaces: à t = 0, M se trouve à l'origine O de la trajectoire circulaire que l'on oriente dans le sens du mouvement.

La position du mobile peut être repérée soit par son **abscisse curviligne s**, soit par son **abscisse angulaire θ qui mesure l'angle de la rotation depuis l'origine O sur le cercle.**




A l'instant $t_1$, son abscisse curviligne est $s_1$, à l'instant $t_2$, il est $s_2$. Son déplacement pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$ est $\Delta s = s_2 - s_1$.

A l'instant $t_1$, son abscisse angulaire est $\theta_1$. (C'est l'angle entre CO et $CM_1$.) A l'instant $t_2$, il est $\theta_2$. Son angle de rotation pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$ est $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

La mesure de l'abscisse angulaire θ est positive si la trajectoire du point a été orientée dans le sens du mouvement ! Cette mesure s'exprime en radians (rad) dans le Système International d'unités.

- **Relation entre l'arc et l'angle :**

$$\boxed{\Delta s = R\cdot\Delta\theta\text{, où }\Delta\theta\text{ est exprimé en rad}}$$

Le radian est donc l'angle pour lequel l'arc est égal au rayon.

Pour 1 tour complet, $\Delta s = 2\pi R$.
On a donc : 1 tour = 360° = $2\pi$ rad.

- **Vitesse linéaire v (instantanée) :**

C'est la vitesse instantanée de M: $v = |v_T| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$.

Dans le cas du mouvement uniforme $\boxed{v = \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|}$ (formule vue en classe de 2e)

- **Vitesse angulaire ω (instantanée) :**

  C'est l'angle duquel M tourne par unité de temps: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{d\theta}{dt}\right|$

  Dans le cas du mouvement uniforme $\boxed{\omega = \left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\right|} \Leftrightarrow \boxed{|\Delta\theta| = \omega \cdot \Delta t}$ (formule à retenir)

  Unité S.I.: 1 rad/s.

- **Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire d'un point :**

  $v = \left|\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \left|\dfrac{R \cdot \Delta\theta}{\Delta t}\right| = R \cdot \left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\right| = R \cdot \omega$

  Finalement: $\boxed{v = R \cdot \omega}$ (formule à retenir)

- **Période de rotation T :**

  C'est la durée d'1 tour : $\Delta t = T$ si $\Delta\theta = 2\pi$

  $\omega = \dfrac{2\pi}{T} \Leftrightarrow$ Période $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$ (formule à retenir)

- **Fréquence de rotation f :**

  C'est le nombre de tours par seconde.

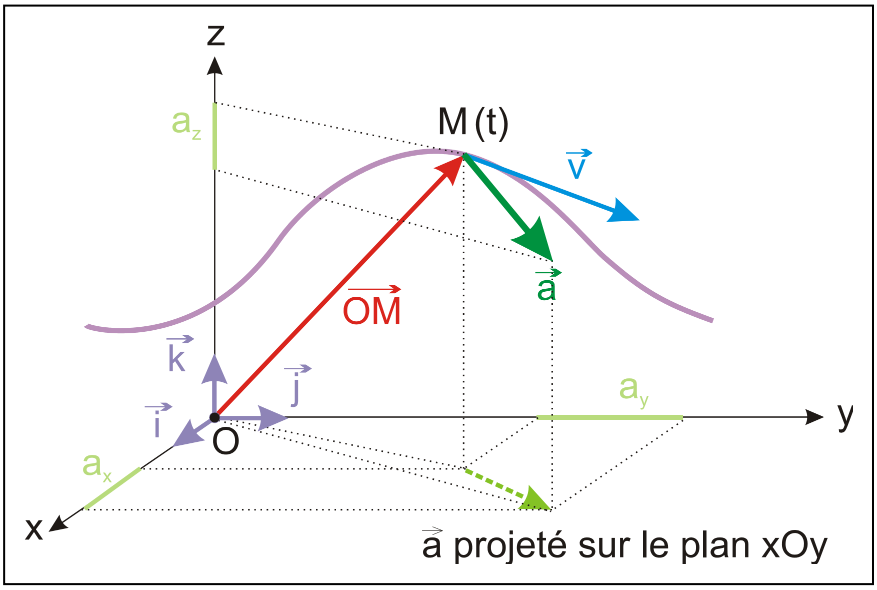
  En T secondes il y a 1 tour

  En 1 seconde il y a 1/T tours

  Fréquence $\boxed{f = \dfrac{1}{T}}$ exprimée en hertz (Hz) (formule à retenir)

## 3. Accélération par rapport à un référentiel

**a) Définition**




$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (1)$$

L'accélération $\vec{a}$ est la dérivée de la vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps.

L'accélération exprime la rapidité avec laquelle la vitesse varie.

Comme $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

L'accélération $\vec{a}$ est la dérivée seconde de la position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

**b) Coordonnées cartésiennes**

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (2)$$

$$\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array}\right. \Leftrightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (3)$$

(1) et (3) $\Rightarrow$ $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k})$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \qquad (4)$$

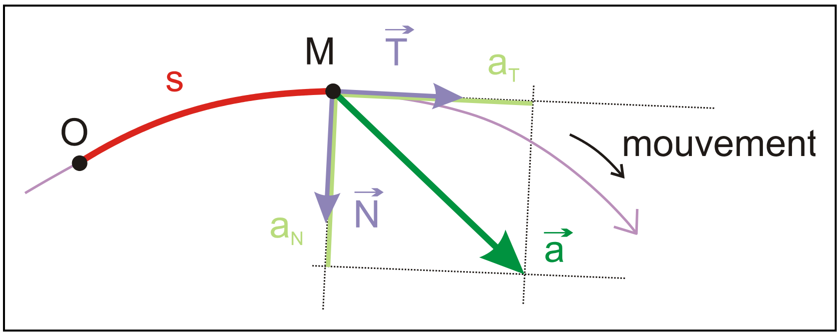
(2) et (4) $\Rightarrow$ $\boxed{a_x = \dfrac{dv_x}{dt};\quad a_y = \dfrac{dv_y}{dt};\quad a_z = \dfrac{dv_z}{dt}}$

Or $v_x = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

De même pour $a_y$ et $a_z$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}\ ;\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2}\ ;\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2}}$

**c) Coordonnées de Frenet**

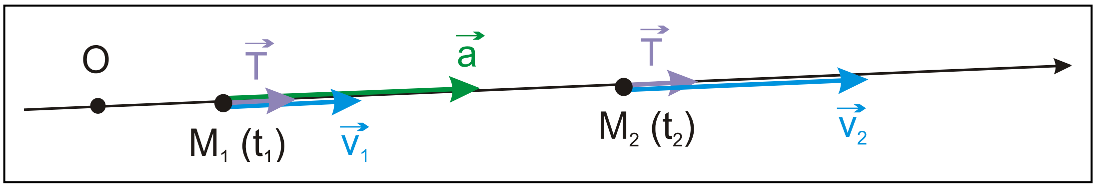
$$\vec{a}\ \begin{vmatrix} a_T \\ a_N \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$$




L'accélération exprime la rapidité avec laquelle $\vec{v}$ varie en norme et en direction.

- **<u>Accélération d'un mobile en mouvement rectiligne</u>** : $\vec{a} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{a} = a_T \cdot \vec{T}$ car $a_N = 0$

Déterminons $a_T$ !




$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{2T} - v_{1T}}{\Delta t}\vec{T}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_T}{\Delta t}\vec{T}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_T}{dt}\vec{T}$$

Finalement : $\boxed{a_T = \dfrac{dv_T}{dt} \text{ et } a_N = 0}$

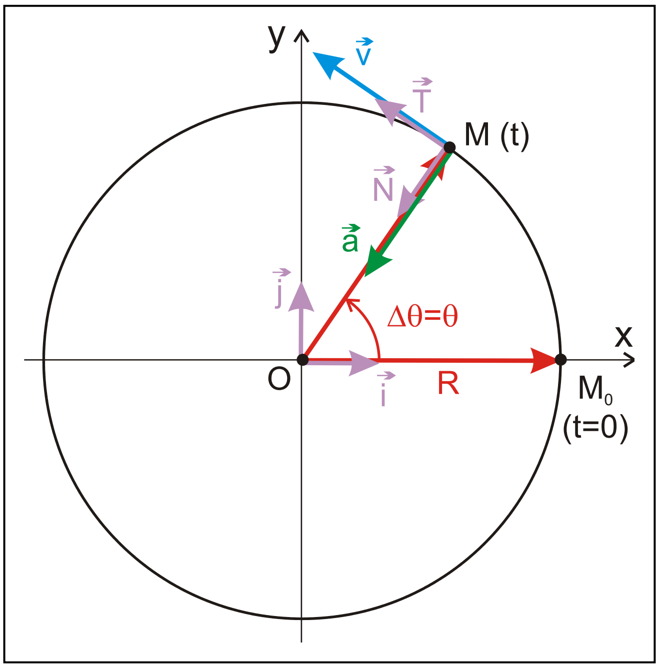
*La coordonnée tangentielle de l'accélération exprime la rapidité avec laquelle la norme de la vitesse varie.*

$\vec{v}$ et $\vec{a}$ de même sens $\Leftrightarrow$ norme v augmente $\Leftrightarrow$ mvt de plus en plus rapide

$\vec{v}$ et $\vec{a}$ de sens opposé $\Leftrightarrow$ v diminue $\Leftrightarrow$ mvt de plus en plus lent (freinage)

- **Accélération d'un mobile en mouvement circulaire uniforme**

***Méthode 1***




M effectue un mouvement uniforme de vitesse v sur une trajectoire circulaire de rayon R.

A l'instant t = 0, la position du mobile $M_0$ est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM_0}$ et par l'abscisse angulaire $\theta_0 = 0$.

Soit un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe Ox soit colinéaire à $\overrightarrow{OM_0}$.

A l'instant t, le vecteur position est $\overrightarrow{OM}$ et l'abscisse angulaire θ.

La relation $|\Delta\theta| = \omega \cdot \Delta t$ du mouvement circulaire uniforme s'écrit ici : $\theta = \omega t$.

Exprimons les coordonnées des vecteurs position, vitesse et accélération !

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = OM \cdot \cos\theta = R \cdot \cos(\omega t) \\ y = OM \cdot \sin\theta = R \cdot \sin(\omega t) \end{vmatrix}$ (1)

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot R \cdot \sin(\omega t) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \omega \cdot R \cdot \cos(\omega t) \end{vmatrix}$

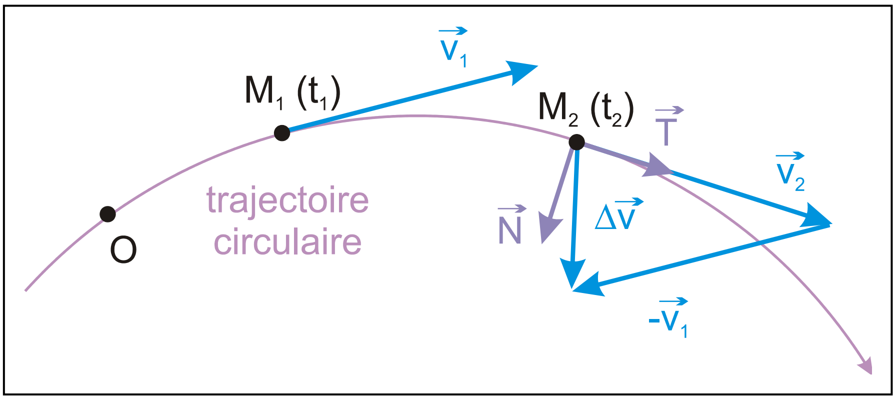
Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} \begin{vmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 \cdot R \cdot \cos(\omega t) = -\omega^2 \cdot x \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 \cdot R \cdot \sin(\omega t) = -\omega^2 \cdot y \end{vmatrix}$ (2)

- (1) et (2) $\Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{a} \text{ est de même direction que } \overrightarrow{OM}}$ (colinéaire à $\vec{N}$)
- Comme $-\omega^2 < 0$, $\boxed{\vec{a} \text{ est de sens contraire à celui de } \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ centripète}}$
- $\boxed{\text{Norme de } \vec{a} : a = \omega^2 \cdot OM = \omega^2 \cdot R}$
- $\boxed{\text{Coordonnées de } \vec{a} : a_T = 0 \text{ et } a_N = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = v\omega}$ $(v = R\omega)$

***La cordonnée normale de l'accélération exprime la rapidité avec laquelle la direction de la vitesse varie.***

## *Méthode 2*

M effectue un mouvement uniforme de vitesse v sur une trajectoire circulaire de rayon R.




v constant $\Rightarrow$ $\boxed{a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0}$

et $\vec{a} = a_N \cdot \vec{N}$

Déterminons $a_N$ !

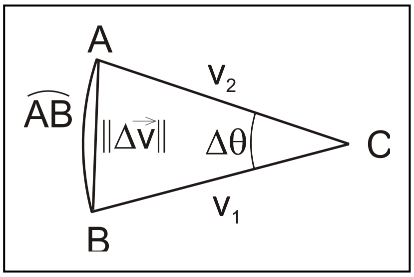
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

* Signe de $a_N$ :

$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{v} \to \vec{0} \Rightarrow$ direction et sens de $\Delta\vec{v}$ $\to$ direction et sens de $\vec{N}$

Donc : $\boxed{\vec{a} \text{ de même direction et de même sens que } \vec{N} \Leftrightarrow a_N > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ est centripète}}$

* Valeur de $a_N$ :




$$a = a_N = \left\| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \right\| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta\vec{v}\|}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta\theta \to 0 \Rightarrow$ corde AB $\to$ arc $\overset{\frown}{AB}$

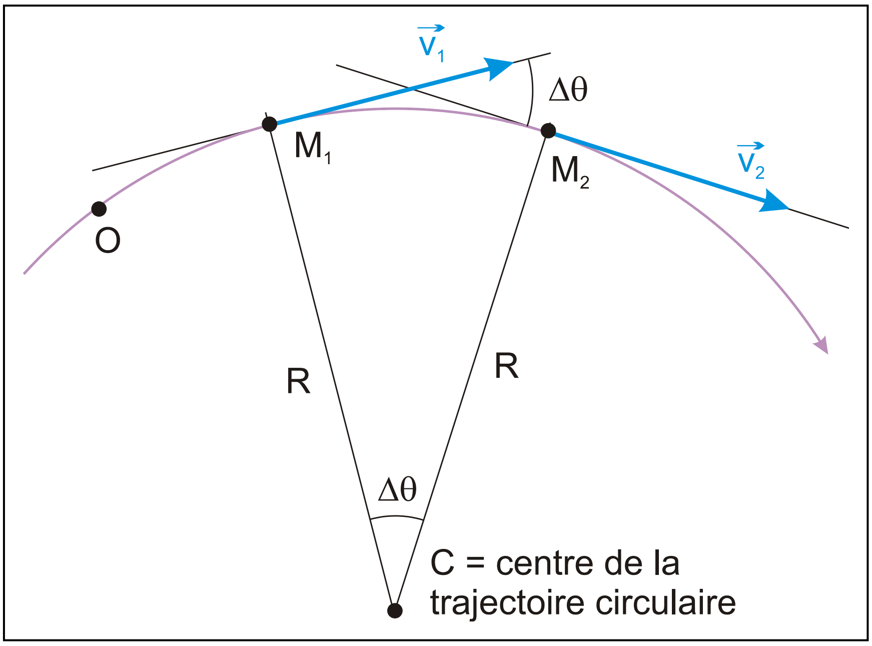
$\Rightarrow \|\Delta\vec{v}\| \to \overset{\frown}{AB} = v \cdot |\Delta\theta|$ ou ($v_1 = v_2 = v$)

$$a_N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot |\Delta\theta|}{\Delta t}$$

$$= v \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right|$$

$$= v \cdot \omega$$

($\Delta\theta$ entre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ = abscisse angulaire entre les vecteurs positions $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ !)




Comme $v = R\omega$

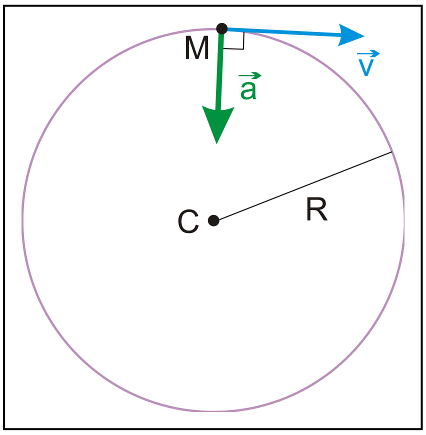
$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = v\omega}$$

**Conclusions:**

1. Au cours d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R et de vitesse v (de vitesse angulaire ω), l'accélération est centripète et de norme :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}$$

Coordonnées de $\vec{a}$ : $\boxed{a_T = 0\ ;\ a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}$




2. ***La coordonnée normale de l'accélération exprime la rapidité avec laquelle la direction de la vitesse varie.***

**d) Remarque : mouvement curviligne quelconque**

Dans le cas général d'un mouvement circulaire non uniforme, l'accélération s'écrit :

$$\boxed{\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = \frac{dv_T}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N}}$$

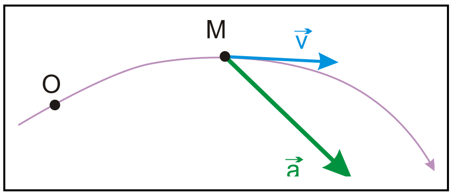
et : $v = |v_T| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$

Cette expression reste même valable pour **un mouvement curviligne quelconque.** Ici **r désigne** alors le **rayon de courbure** de la trajectoire qui peut varier durant le mouvement.

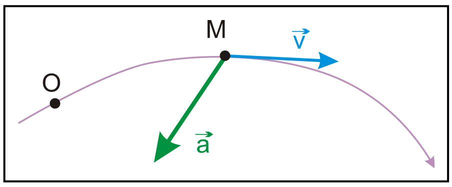
Ce n'est que pour un mouvement circulaire que le rayon de courbure r est constant.

Exemples :

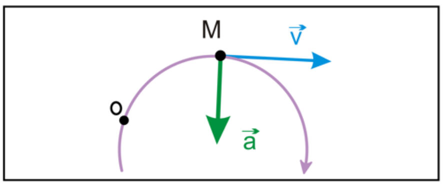
$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ ⇔ angle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$ aigu
⇔ v aumente
⇔ mvt de plus en plus rapide



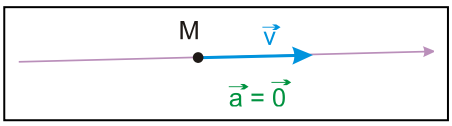

$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ ⇔ angle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$ obtus
⇔ v diminue
⇔ mvt de plus plus lent (freinage)




$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ ⇔ angle rectangle entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$
⇔ v constant
⇔ mvt circulaire et uniforme




$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ ⇔ *si* $\vec{a} = \vec{0}$ ⇔ $\vec{v}$ constant
⇔ mvt rectiligne et uniforme



## 4. Mouvements rectilignes

Nous les étudions dans un repère cartésien comportant un seul axe Ox parallèle au mouvement.

Nous établirons les formules vues en classe de 2e beaucoup plus aisément à l'aide des relations avec les dérivées.

### a) Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

C'est un mouvement à vecteur accélération nul!

* **Conditions initiales** (C.I.)

$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0$ (1)

$v_x = v_{0x}$ (2)

* **Accélération**

$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{a_x = 0} \quad \forall t$

* **Vitesse**

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = K$ (K = constante d'intégration) (3)

Déterminons K : $t = 0$ : (2) $\Rightarrow$ $v_x = v_{0x}$

(3) $\Rightarrow$ $v_x = K$

D'où : $K = v_{0x}$ !

Finalement : $\boxed{v_x = v_{0x}} \quad \forall t$

* **Position**

Or $v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} \Rightarrow x = v_{0x}t + K'$ (K' = constante d'intégration) (4)

Déterminons K' : $t = 0$ (1) $\Rightarrow$ $x = x_0$

(4) $\Rightarrow$ $x = K'$

D'où : $K' = x_0$ !

Finalement : $\boxed{x = v_{0x}t + x_0} \quad \forall t$

**b) Mouvement rectiligne uniformément varié (MRUV)**

C'est un mouvement à vecteur accélération constant!

* **Conditions initiales** (C.I.)

$t = 0 \Rightarrow x = x_0$ (1)

$v_x = v_{0x}$ (2)

* **Accélération**

$\vec{a}$ constant $\Rightarrow$ $\boxed{a_x \text{ constant}}$ $\forall t$

* **Vitesse**

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{constant} \Rightarrow v_x = a_x t + K \quad \text{(K = constante d'intégration)} \qquad (3)$$

Déterminons K : $t = 0$ : (2) $\Rightarrow$ $v_x = v_{0x}$

(3) $\Rightarrow$ $v_x = K$

D'où : $K = v_{0x}$ !

Finalement : $\boxed{v_x = a_x t + v_{0x}}$ $\forall t$ (4)

* **Position**

$$\text{Or } v_x = \frac{dx}{dt} = a_x t + v_{0x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + K' \quad \text{(K' = constante d'intégration)} \qquad (5)$$

Déterminons K' : $t = 0$ (1) $\Rightarrow$ $x = x_0$

(5) $\Rightarrow$ $x = K'$

D'où : $K' = x_0$ !

Finalement : $\boxed{x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0}$ $\forall t$ (6)

En éliminant t entre (4) et (6) on obtient une relation entre les vitesses et les abscisses :

$$\boxed{v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta(v_x^2) = 2a_x \Delta x}$$