Chapitre 2: Mouvement dans un champ de force constant

1. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

a) Données

Un projectile, de masse m est lancé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une **vitesse initiale de lancement** $\vec{v}_0$. Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu α appelé **angle de tir**.

Dans la suite on n'étudiera que des mouvements de vitesse initiale faible. Les dimensions de la trajectoire restent alors négligeables par rapport au rayon de la Terre **ce qui permet de considérer le champ de pesanteur comme uniforme** : $\vec{g}$ est constant en direction, sens et intensité.

Caractéristiques du champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$:

direction : verticale
sens : vers le bas
norme : $g = 9{,}81\ m/s^2$ = constant

(Pour des mouvements de longue portée il faudra tenir compte :
- du changement de direction de $\vec{g}$ en raison de la courbure de la Terre
- de la variation de l'intensité de $\vec{g}$ avec l'altitude.)

De plus, si la vitesse du projectile reste faible on pourra **négliger le frottement de l'air** par rapport au poids.

b) Système. Référentiel. Repère

* Le système est le projectile de masse m.
* Le référentiel est celui de la Terre.
* L'origine O du repère cartésien ne coïncide pas forcément avec le point de lancement du projectile.
  L'axe Ox (défini par $\vec{i}$) est horizontal et est contenu dans le plan vertical contenant $\vec{v}_0$.
  L'axe Oy (défini par $\vec{j}$) est vertical et dirigé vers le haut.
  On verra dans la suite qu'on n'a pas besoin du troisième axe Oz (horizontal et perpendiculaire au plan Oxy) car le mouvement se déroule uniquement dans le plan Oxy.

c) Conditions initiales

* Position initiale :

A t = 0 : $\overrightarrow{OM_0}$: $x_0 = 0$ (par exemple)

$y_0 \neq 0$ (le projectile part à une altitude quelconque)

$z_0 = 0$

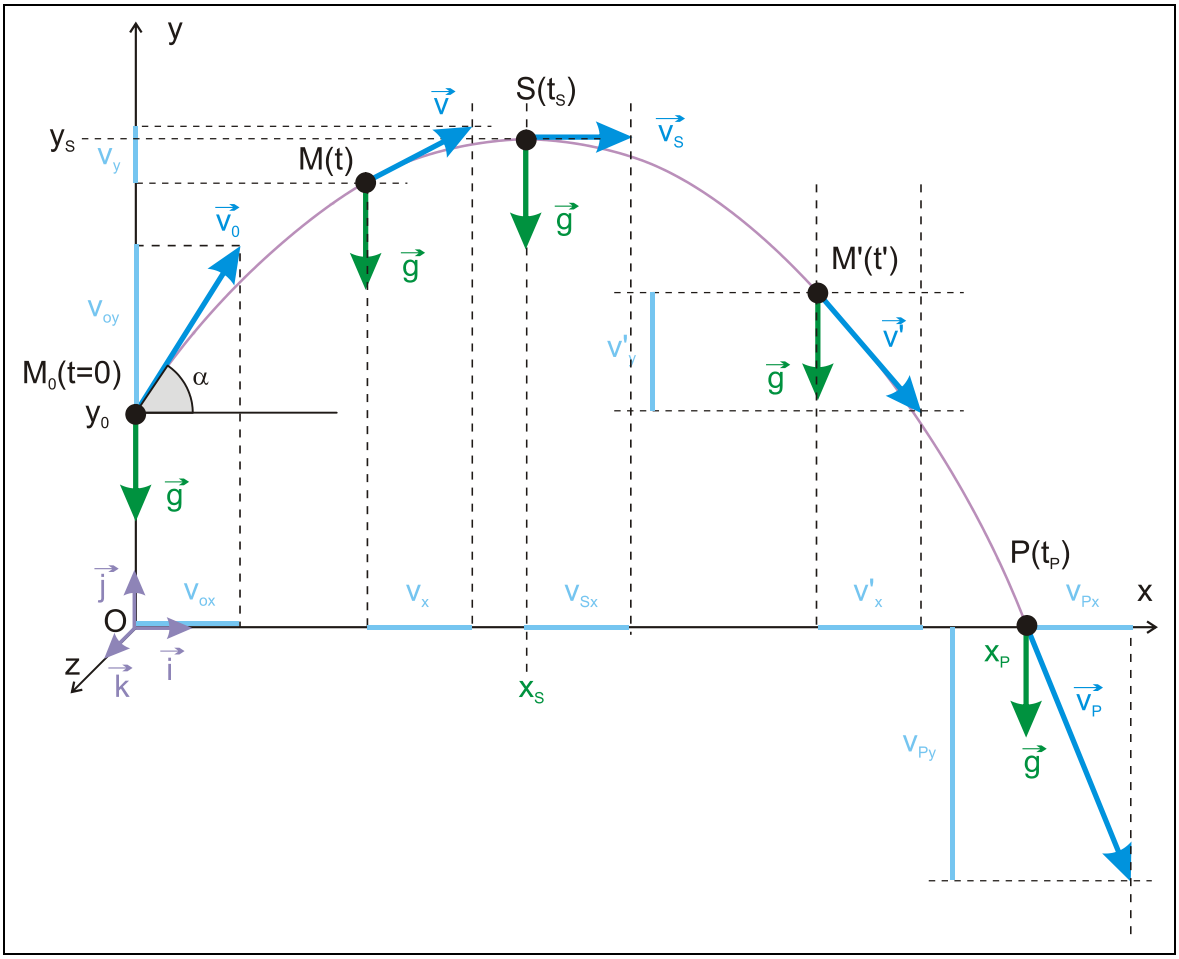
* Vitesse initiale :

A t = 0 : $\vec{v}_0$ forme avec l'axe Ox un angle de tir α tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\vec{v}_0$: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

$v_{0z} = 0$ (à cause du choix des axes Ox et Oy !)



d) Forces extérieures

Seule force extérieure : poids $\vec{P}$ du projectile.

(Nous avons négligé le frottement !)

e) Accélération

Appliquons le principe fondamental de Newton (Newton II) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\vec{a}$$
$$m\vec{g} = m\vec{a}$$
$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

Conclusion :

> L'accélération est un vecteur constant dont la norme est indépendante de la masse du projectile. Sa norme est égale à l'intensité de la pesanteur.

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe Ox : $\boxed{a_x = 0}$ (1)

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe Oy : $\boxed{a_y = -g}$ (2)

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe Oz : $\boxed{a_z = 0}$

Remarque :

Comme il n'y a ni accélération, ni vitesse initiale suivant Oz, il n'y aura pas de mouvement suivant cet axe. Il nous reste à étudier le mouvement suivant Ox et Oy !

f) Vitesse

Comme $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ et $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, les coordonnées de la vitesse sont les primitives des coordonnées de l'accélération.

A partir de (1) on obtient : $v_x = C$ (3)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $v_x = v_0 \cos\alpha$

Remplaçons dans (3) $\Rightarrow$ $C = v_0 \cos\alpha$. Donc : $\boxed{v_x = v_0 \cos\alpha}$ (4)

Conclusion :

> La projection du mouvement sur l'axe Ox est un mouvement uniforme.

A partir de (2) on obtient : $v_y = -gt + C$ (5)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $v_y = v_0 \sin\alpha$.

Remplaçons dans (5) $\Rightarrow$ $C = v_0 \sin\alpha$. Donc : $\boxed{v_y = -gt + v_0 \sin\alpha}$ (6)

Conclusion :

> La projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

g) Position (équations paramétriques du mouvement)

Comme $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$, les coordonnées de la position sont les primitives des coordonnées de la vitesse.

A partir de (4) on obtient : $x = v_0(\cos\alpha)\cdot t + C$ (7)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ x = x_0 = 0.

Remplaçons dans (7) $\Rightarrow$ C = 0. Donc : $\boxed{x = v_0(\cos\alpha)\cdot t}$ (8)

A partir de (6) on obtient : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t + C$ (9)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ y = y_0.

Remplaçons dans (9) $\Rightarrow$ C = y_0. Donc : $\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t + y_0}$ (10)

h) Equation cartésienne de la trajectoire

(8) $\Rightarrow$ $t = \frac{x}{v_o\cos\alpha}$

Dans (10) $\Rightarrow$ $\boxed{y = -\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2 + x\cdot\tan\alpha + y_0}$ (11)

C'est l'équation d'une parabole.

i) Position du point d'impact P sur le sol

Pour P, y = 0. Remplaçons dans l'équation (11): $\boxed{-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x^2 + x\cdot\tan\alpha + y_0 = 0}$ (12)

Cette équation du deuxième degré a en principe deux racines.

j) Position du point d'impact P au cas particulier où y_0 = 0

L'équation (12) s'écrit maintenant : $x\left(-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 0$

Il faut donc que : soit x = 0, soit $-\frac{g}{2v_o^2\cos^2\alpha}x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

1^{ére} solution : $x_1 = 0$ (point de lancement)

2e solution : $$x_2 = x_P = \frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad (13)$$

* Remarque 1

La relation (13) permet de calculer α pour une valeur donnée de v_0 !

$$\sin(2\alpha) = \frac{g \cdot x_P}{v_o^2}$$

Cette équation trigonométrique admet deux solutions α_1 et α_2 telles que :

$$2\alpha_2 = \pi - 2\alpha_1$$

ou bien : $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$

Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0, une même portée x_P est atteinte pour deux angles de tir différents (si α est différent de 0°, 45° et 90°). Ces deux angles sont complémentaires.

* Remarque 2

x_P dépend de l'angle de tir; pour une valeur donnée de v_0 elle est maximale si :

$$\sin 2\alpha = 1$$
$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0, la portée x_P est maximale pour $\alpha = 45°$.

k) Position du sommet S (altitude maximale atteinte)

En S, la coordonnée verticale du vecteur vitesse est nulle :

$$v_y(S) = 0 \Leftrightarrow -gt_S + v_0 \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_S = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

Remplaçons dans (10): $$\boxed{y_S = -\frac{1}{2} g t_S^2 + v_0 (\sin\alpha) \cdot t_S + y_0}$$

Lorsqu'on dispose de valeurs numériques, le calcul est en général simple !

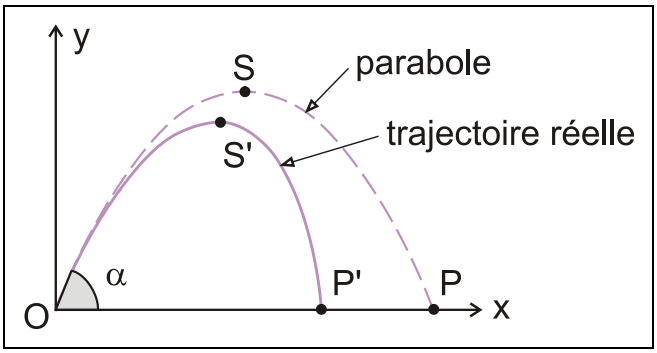
l) Position du sommet S au cas particulier où $y_0 = 0$

Dans ce cas : $t_S = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow \quad y_S = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)^2 + v_0 (\sin\alpha) \cdot \left(\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)$

Finalement : $y_S = \dfrac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g}$

m) Tir réel

En présence du frottement de l'air, la trajectoire n'est plus symétrique et les valeurs $y_{S'}$ et de $x_{P'}$ sont nettement inférieures à celles qu'on vient de calculer.



2. Mouvement d'une charge dans un champ électrique uniforme

a) Données

A l'instant initial, une particule de masse m et de charge électrique q > 0 pénètre avec la vitesse $\vec{v}_0$ dans l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan, auxquelles on a appliqué une tension constante $U = V_+ - V_- > 0$.

La vitesse initiale $\vec{v}_0$ est contenue dans le plan perpendiculaire aux armatures.

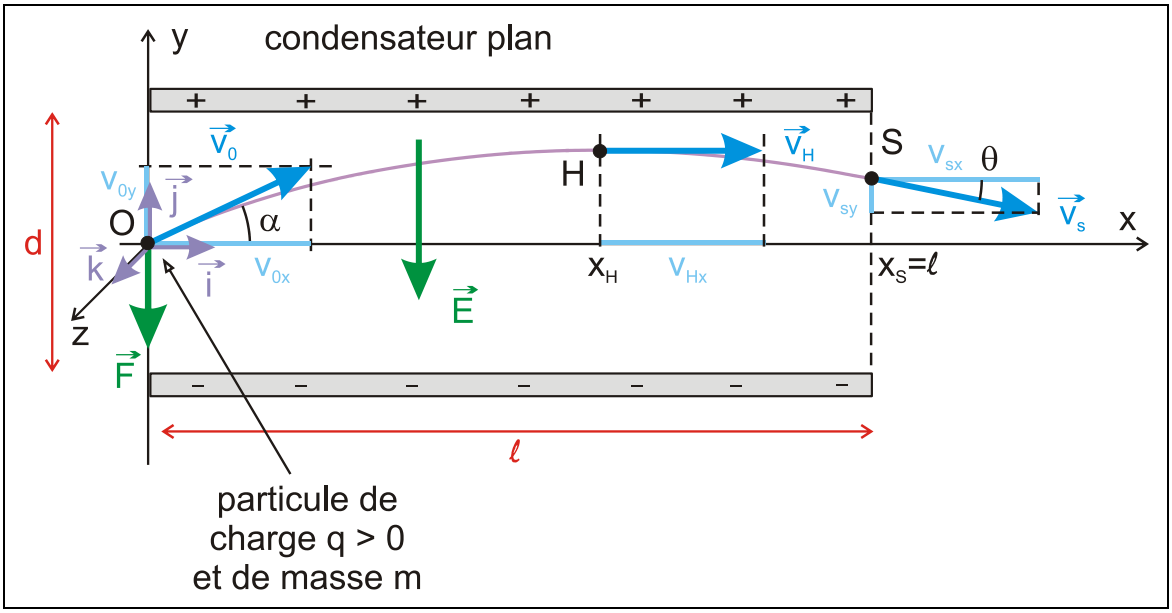
Entre ces plaques s'établit un champ électrique uniforme $\vec{E}$:

direction :	perpendiculaire aux plaques	
sens :	de la plaque + vers la plaque –	(vers les potentiels décroissants)
norme :	$E = \frac{U}{d} = \text{constant}$	(d : distance entre les plaques)

Le mouvement a lieu dans le vide afin d'éviter les chocs avec d'autres particules.

b) Système. Référentiel. Repère

* Le système étudié est la particule chargée.
* Le référentiel est celui du condensateur qui crée le champ électrique uniforme.
* Repère cartésien :
  L'origine O est le point par lequel la charge entre dans le champ.
  L'axe Oy (défini par $\vec{j}$) est parallèle à $\vec{E}$ (de même sens ou de sens contraire).
  L'axe Ox (défini par $\vec{i}$), perpendiculaire à Oy, est tel que le plan Oxy contient $\vec{v}_0$.
  On verra dans la suite qu'on n'a pas besoin du troisième axe Oz (perpendiculaire au plan Oxy) car le mouvement se déroule uniquement dans le plan Oxy.



c) Conditions initiales

* Position initiale :

A t = 0 : Position : $x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$z_0 = 0$

* Vitesse initiale :

A t = 0 : $\vec{v}_0$ forme avec l'horizontale un angle α tel que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\vec{v}_0$: $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

$v_{0z} = 0$ (à cause du choix des axes Ox et Oy !)

d) Forces extérieures

Force électrique $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$

Le poids est négligeable devant $\vec{F}$. Il n'y a pas de frottement car le mouvement se fait dans le vide.

e) Accélération

Appliquons le principe fondamental de Newton (Newton II) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$q\vec{E} = m\vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}}$$

Champ $\vec{E}$ uniforme $\Rightarrow$ accélération $\vec{a}$ constante

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe Ox : $\boxed{a_x = 0}$ (1)

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe Oy : $\boxed{a_y = -\frac{q}{m}E}$ (2)

Projection de l'équation vectorielle sur l'axe Oz : $\boxed{a_z = 0}$

Remarque :

Comme il n'y a ni accélération, ni vitesse initiale suivant Oz, il n'y aura pas de mouvement suivant cet axe. Il nous reste à étudier le mouvement suivant Ox et Oy !

f) Vitesse

Comme $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ et $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, les coordonnées de la vitesse sont les primitives des coordonnées de l'accélération.

A partir de (1) on obtient : $v_x = C$ (3)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $v_x = v_0 \cos\alpha$

Remplaçons dans (3) $\Rightarrow$ $C = v_0 \cos\alpha$. Donc : $\boxed{v_x = v_0 \cos\alpha}$ (4)

Conclusion :

La projection du mouvement sur l'axe Ox est un mouvement uniforme.

A partir de (2) on obtient : $v_y = -\frac{qE}{m}t + C$ (5)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $v_y = v_0 \sin\alpha$.

Remplaçons dans (5) $\Rightarrow$ $C = v_0 \sin\alpha$. Donc : $\boxed{v_y = -\frac{qE}{m}t + v_0 \sin\alpha}$ (6)

Conclusion :

La projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

g) Position (équations paramétriques du mouvement)

Comme $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$, les coordonnées de la position sont les primitives des coordonnées de la vitesse.

A partir de (4) on obtient : $x = v_0(\cos\alpha)\cdot t + C$ (7)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ $x = x_0 = 0$.

Remplaçons dans (7) $\Rightarrow$ C = 0. Donc : $\boxed{x = v_0(\cos\alpha)\cdot t}$ (8)

A partir de (6) on obtient : $y = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t + C$ (9)

Condition initiale : t = 0 $\Rightarrow$ y = 0.

Remplaçons dans (9) $\Rightarrow$ C = 0. Donc : $\boxed{y = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2 + v_0(\sin\alpha)\cdot t}$ (10)

h) Equation cartésienne de la trajectoire

(8) $\Rightarrow$ $t = \dfrac{x}{v_o \cos\alpha}$

Dans (10) $\Rightarrow$ $\boxed{y = -\dfrac{qE}{2mv_o^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \cdot \tan\alpha}$ (11)

C'est l'équation d'une parabole.

i) Particule au point de sortie S du champ : position, date, vitesse

* Abscisse du point S : $x_s = \ell$ (12)

(12) dans (11) $\Rightarrow$ $y_S = -\dfrac{qE\ell^2}{2mv_0^2 \cos^2\alpha} + \tan\alpha \cdot \ell$

* (12) dans (8) $\Rightarrow$ date t_S de sortie du champ : $t_S = \dfrac{\ell}{v_0 \cos\alpha}$ (13)

* (13) dans (4) et (6) $\Rightarrow$ vitesse $\vec{v}_S$ de la charge à la sortie du champ :

Coordonnées : $v_{Sx} = v_0 \cdot \cos\alpha$

$$v_{Sy} = -\frac{qE\ell}{mv_0 \cos\alpha} + v_0 \sin\alpha$$

Direction de $\vec{v}_S$ par rapport à l'axe Ox : $\tan\theta = \dfrac{v_{Sy}}{v_{Sx}}$

j) Position du point le plus haut H

En H, la coordonnée verticale du vecteur vitesse est nulle :

$$v_y(H) = 0 \Leftrightarrow -\frac{qE}{m} t_H + v_0 \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_H = \frac{v_0 m \sin\alpha}{qE}$$

Remplaçons dans (10) : $\boxed{y_H = -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m} t_H^2 + v_0 (\sin\alpha) \cdot t_H}$

Lorsqu'on dispose de valeurs numériques, le calcul est en général simple !

3. Remarques importantes

1) Dans un champ de force constant, le mouvement d'un corps est en général parabolique. L'étude du mouvement se fait de la même manière aussi bien pour une masse m dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ que pour une charge q dans un champ électrique $\vec{E}$.
2) Si la vitesse initiale est dirigée obliquement vers le bas, il faudra introduire un angle α négatif dans toutes les formules ! Pour $\cos\alpha$ rien ne change, par contre $\sin\alpha$ deviendra négatif.
3) Dans le cas particulier où $\alpha = \pm 90°$, le mouvement est rectiligne et uniformément varié suivant l'axe Oy. Etablir les formules à titre d'exercice !
4) Dans le cas d'une charge négative, toutes les formules restent valables. Il suffit de remplacer q par sa valeur négative. Dans ce cas l'accélération est dirigée vers le haut et la parabole est ouverte vers le haut.