Chapitre 3: Mouvement d'une particule soumise à une force centrale. Gravitation

1. Particule en mouvement circulaire uniforme

Il a été établi en cinématique (p8-10) que :

> Un corps de masse m, en **mouvement circulaire uniforme** de rayon r et de vitesse v (de vitesse angulaire ω), a une **accélération centripète** $\vec{a}$ de norme $a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$.

D'après le principe fondamental de Newton, un corps de masse m, animé d'une accélération $\vec{a}$ est soumis à une seule force ou à un ensemble de forces de résultante $\sum \vec{F}$, suivant la relation :

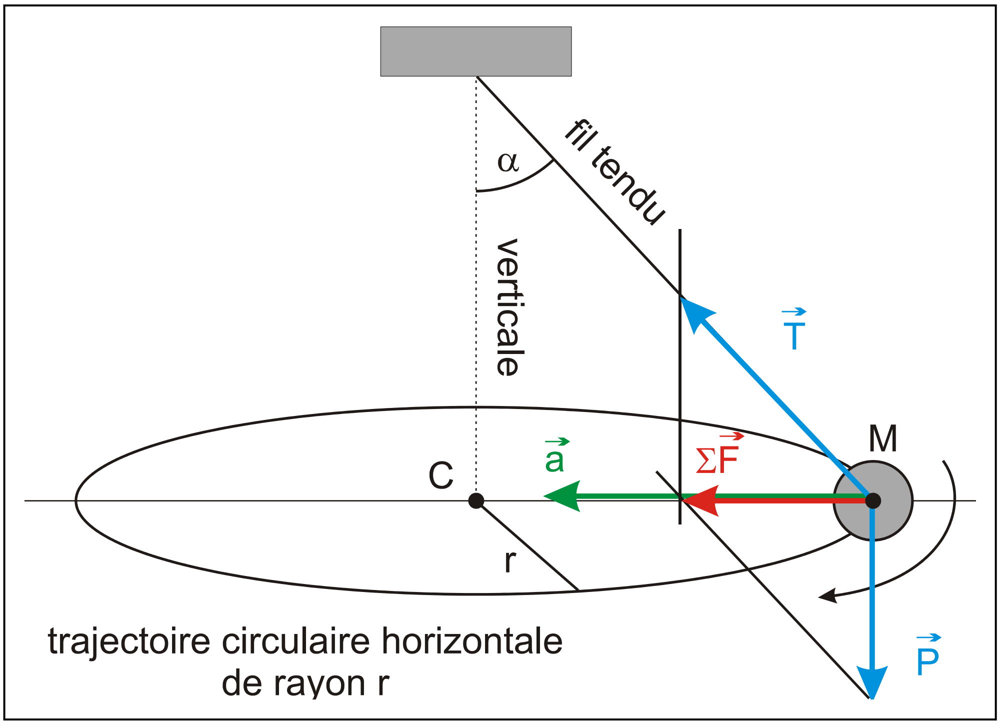
$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

Conclusion :

La résultante de toutes les forces s'exerçant sur un corps en mouvement circulaire uniforme est centripète et de norme : $\lVert\sum \vec{F}\rVert = \mathrm{m}\,a = m\,r\,\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$

Exemple :

Masse m suspendu à un fil en mouvement circulaire uniforme ; soumis à deux forces, la tension $\vec{T}$ du fil et le poids $\vec{P}$. (Le fil fait un angle α constant avec la verticale.) La résultante de ces deux forces est constamment centripète, colinéaire à l'accélération de la masse m.



2. Loi de Newton de la gravitation

a) Force d'interaction gravitationnelle

En analysant les mouvements planétaires, Newton a pu montrer que la forme elliptique des trajectoires observées résulte d'une force

* dirigée vers le centre du soleil
* d'intensité inversement proportionnelle au carré de la distance à ce centre.

Cette constatation l'a amené à généraliser cette conclusion et à formuler la **loi d'attraction des masses** qui est une propriété universelle de la matière :

> Deux particules matérielles ponctuelles A et B de masses respectives m_A et m_B, situées l'une de l'autre à la distance r, **s'attirent** mutuellement avec une force d'intensité
>
> $$F_{A\,sur\,B} = F_{B\,sur\,A} = K\frac{m_A m_B}{r^2}$$

* $\vec{F}_{A\ sur\ B}$ est la force gravitationnelle que A exerce sur B.
  $\vec{F}_{B\ sur\ A}$ est la force gravitationnelle que B exerce sur A.
  D'après le principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{A\,sur\,B} = -\vec{F}_{B\,sur\,A}$

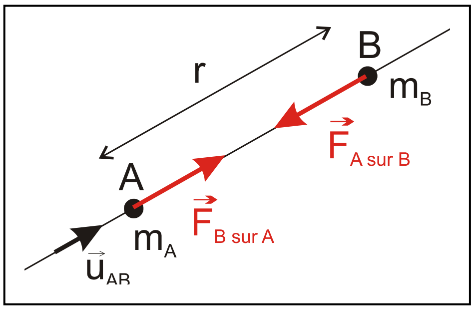
* K est la **constante de gravitation universelle** qui vaut $K = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

* Remarque : Cette formulation de la loi de Newton ne s'applique qu'à des masses ponctuelles ; cependant on démontre qu'une sphère homogène de masse m et de rayon R équivaut à un point matériel se trouvant au centre de la sphère et dont la masse est égale à m. Ceci est notamment le cas pour la plupart des corps célestes.

b) Forme vectorielle

Soit $\vec{u}_{AB}$ un vecteur unitaire de la droite (AB) orienté de A vers B. Les forces attractives qui s'exercent entre les deux masses ponctuelles s'expriment par

$$\vec{F}_{A\,sur\,B} = -\vec{F}_{B\,sur\,A} = -K\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{AB}$$



3. Champ de gravitation

a) Qu'est-ce qu'on entend par champ de gravitation ?

Un champ de gravitation est une portion de l'espace où une masse m est soumise à une force de gravitation $\vec{F}$.

b) Définition du vecteur champ de gravitation $\vec{G}$

Le vecteur champ de gravitation en un point de l'espace est caractérisé par le vecteur $\vec{G}$ égal à la force de gravitation par kg de masse placée en ce point.

Unité S.I. de G : 1 N/kg.

$$\boxed{\text{Champ de gravitation : } \vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \text{de norme : } G = \frac{F}{m} \quad \Leftrightarrow \quad F = m\,G}$$

Comme m > 0, donc $\vec{G}$ a même direction et même sens que $\vec{F}$.

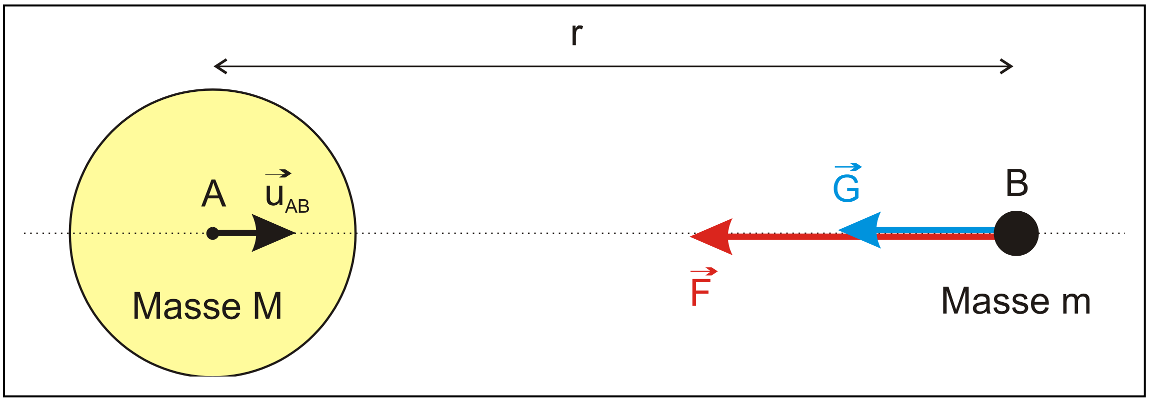
Le vecteur champ $\vec{G}$ est une caractéristique du point considéré ; il est indépendant de la masse m qui est placée en ce point. (On néglige le champ de gravitation créé par m.)

c) Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle (ou par un corps sphérique homogène)

Considérons une grande masse ponctuelle M située en un point A (ou bien un corps sphérique de rayon R, de masse M et de centre A). **La masse M crée un champ de gravitation** autour d'elle !

Plaçons (par la pensée) dans ce champ une petite masse m en un point B situé à la distance r du point A. **La masse m se trouve dans le champ créé par la masse M** et subit une force de gravitation $\vec{F}$:

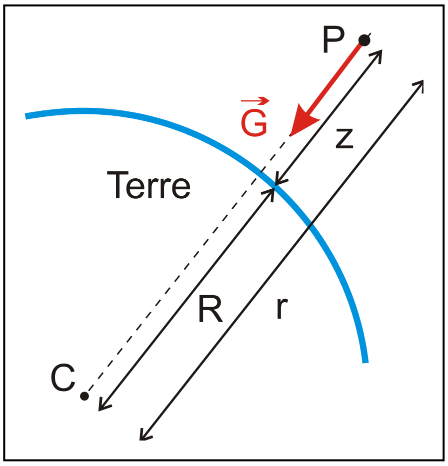
$$\vec{F} = -K\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_{AB} \qquad (\vec{u}_{AB} \text{ un vecteur unitaire dirigé de A vers B})$$



$\vec{G}$ au point B : $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = -K\frac{M}{r^2}\vec{u}_{AB}$ de norme : $\boxed{G = K\frac{M}{r^2}}$

d) Champ de gravitation de la Terre (supposée être une sphère homogène)

L'intensité du champ de gravitation de la Terre (ou de tout autre corps céleste) diminue lorsqu'on s'éloigne du centre C de la Terre. Soit R le rayon et M la masse de la Terre ; considérons un point P situé à l'altitude z au-dessus de la surface terrestre.



En P: $r = R + z$

$$G = K \cdot \frac{M}{(R+z)^2} \qquad (1)$$

A la surface de la Terre, z = 0 : $G_0 = K\frac{M}{R^2}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $\boxed{G = G_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}}$

e) Remarque : Champ de gravitation et champ de pesanteur

On ne fait généralement pas de distinction entre

la force d'attraction de la Terre : $\vec{F} = m\,\vec{G}$ (G : intensité du champ de gravitation)

et le poids : $\vec{P} = m\,\vec{g}$ (g : intensité du champ de pesanteur ou accélération de chute libre)

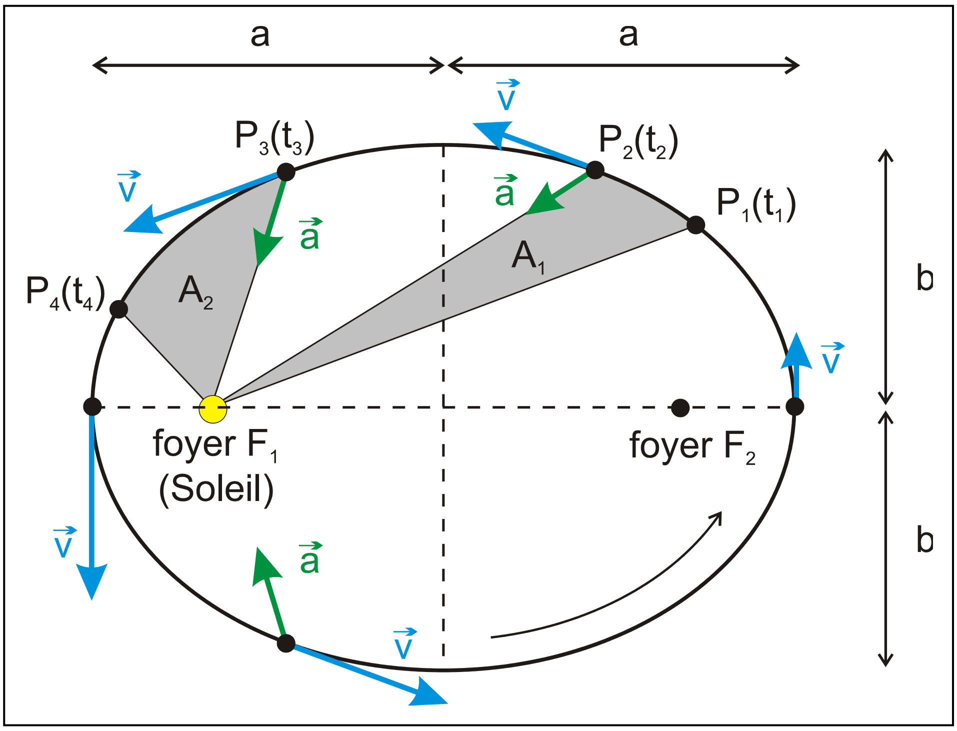
La détermination de $\vec{g}$ par la chute libre se fait dans un référentiel terrestre, qui, **à cause de la rotation de la Terre**, n'est pas galiléen (en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel) ; il s'en suit qu'en toute rigueur $\vec{G} \neq \vec{g}$. Mais comme la vitesse angulaire de la Terre est relativement faible, ces deux forces sont pratiquement identiques et on peut écrire en première approximation : $\vec{g} \approx \vec{G}$

A la surface d'une Terre sphérique (masse terrestre = 5,9742 10^{24} kg, rayon terrestre moyen = 6371 km) : G_0 = 9,82 N/kg.

A cause de la rotation terrestre et de l'aplatissement de la Terre (rayon polaire = 6357 km, rayon équatorial = 6378 km), g_o varie avec la latitude du lieu : équateur : g_0 = 9,78 m/s^2 ; Luxembourg : g_0 = 9,81 m/s^2 ; aux pôles : g_0 = 9,83 m/s^2 (Remarque :1 m/s^2 =1 N/kg).

4. Mouvement des planètes et satellites : Lois de Kepler

Partisan du système de Copernic qu'il voulait démontrer en le confrontant à des observations précises, Kepler constata que les trajectoires des planètes ne sont pas circulaires mais elliptiques.



a) Première loi

Les **trajectoires** planétaires sont des **ellipses** dont le soleil occupe l'un des foyers.

b) Deuxième loi

En des **durées** égales, les **aires** balayées par le segment qui joint le centre de la planète au centre du soleil sont égales :

$$\text{Si } t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \text{ alors } A_1 = A_2 .$$

(A cause de la conservation de l'énergie mécanique totale du système « planète-Soleil », la vitesse de la planète est plus grande si sa distance au Soleil est plus petite ! En effet si la planète s'approche du Soleil, l'énergie potentielle du système diminue et ainsi l'énergie cinétique augmente. Inversement en s'écartant du Soleil, l'énergie potentielle augmente et l'énergie cinétique diminue.)

c) Troisième loi

Le carré de la **période** de révolution T d'une planète est proportionnel au cube du **demi-grand axe** a de son orbite : $T^2 \sim a^3$

Respectivement : $\dfrac{T_1^2}{a_1^3} = \dfrac{T_2^2}{a_2^3} = \text{constante}$

Avec : T_1 : période d'une première planète de demi-grand axe a_1 ; T_2 : période d'une deuxième planète de demi-grand axe a_2

d) Remarque

Comme une trajectoire non rectiligne implique nécessairement la présence d'une force (principe d'inertie), Newton a pu déduire des lois de Kepler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle. Il en déduisit d'ailleurs que sous certaines conditions des trajectoires paraboliques ou hyperboliques sont également possibles (ce qui est p.ex. le cas pour les certaines comètes).

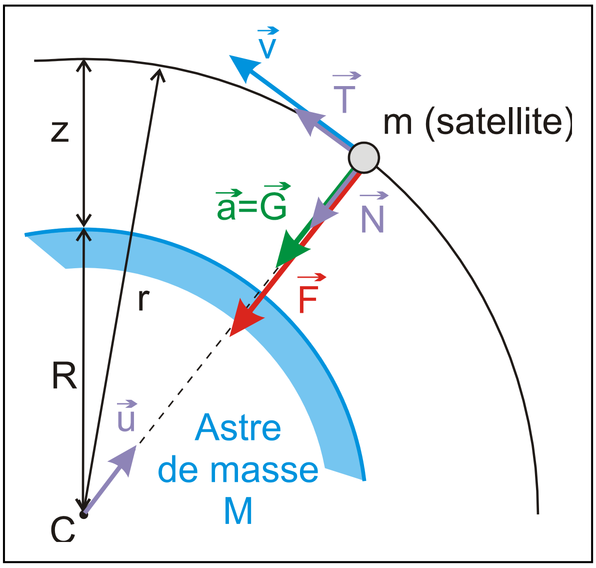
5. Satellite en mouvement circulaire et uniforme

a) Données

Le cercle peut être considéré comme une ellipse particulière où les deux foyers sont confondus. Dans ce cas le grand axe et le petit axe sont égaux et correspondent au diamètre.

L'étude suivante se limite aux trajectoires circulaires, ce qui correspond en première approximation

* aux orbites des satellites artificiels de la Terre dans le **référentiel géocentrique** (constitué par le centre de la Terre et trois étoiles fixes bien déterminées) ;
* à la plupart des orbites planétaires dans le **référentiel héliocentrique de Copernic** (constitué par le centre du Soleil et les trois mêmes étoiles fixes).



On considère un satellite de masse m tournant autour d'un astre (Terre) de masse M sur un cercle de rayon r = R + z, avec R = rayon de l'astre et z = altitude.

Le centre de la trajectoire coïncide avec celui de l'astre.

b) Système. Référentiel. Repère

* Le système étudié est le satellite de masse m évoluant, avec une vitesse v, à la distance r par rapport au centre C de l'astre.

* Le référentiel dépend du cas qu'on étudie :

- Cas d'un satellite artificiel de la Terre : **référentiel géocentrique.**
- Cas d'une (petite) lune en mouvement autour d'une planète : référentiel constitué par le centre de la planète et les mêmes étoiles fixes que celles du référentiel géocentrique.
- Cas d'une planète en mouvement autour du Soleil : **référentiel héliocentrique de Copernic**.

* Pour les mouvements circulaires on utilise de préférence le repère de Frenet (expressions mathématiques plus simples). (avec : $\vec{u} = -\vec{N}$)

c) Forces extérieures

Uniquement la force gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre de l'astre : $\vec{F} = -K\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$

d) Accélération

Principe fondamental : $\sum\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad -K\frac{Mm}{r^2}\vec{u} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -K\frac{M}{r^2}\vec{u} = \vec{G}}$$

Projection sur l'axe tangentiel : $a_T = 0$ (1)

Projection sur l'axe normal : $a_N = K\frac{M}{r^2} = G$ (2)

e) Vitesse

En cinématique (p11) on a vu que dans le repère de Frenet, l'accélération d'un mouvement curviligne quelconque (ici circulaire : r = const.) s'écrit :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_T = \dfrac{dv_T}{dt} \\ a_N = \dfrac{v^2}{r} \end{array}\right.$$

(1) $\Rightarrow \quad \frac{dv_T}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$ la vitesse $v = |v_T|$ = constante

Conclusion 1 : $\boxed{\text{Le mouvement d'un satellite en orbite circulaire est uniforme.}}$

(2) $\quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{r} = K\frac{M}{r^2} = G$

$\Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{KM}{r}} = \sqrt{G \cdot r}$ ou $v = -\sqrt{\frac{KM}{r}} = -\sqrt{G \cdot r}$ à écarter car norme v > 0

Ainsi : $$v = \sqrt{\frac{KM}{r}} = \sqrt{G \cdot r}$$

Or : $$G = G_0 \frac{R^2}{(R+z)^2}$$ et : $$r = R + z$$

On obtient : $$\boxed{v = \sqrt{\frac{KM}{R+z}} = R\sqrt{\frac{G_0}{R+z}}}$$

Conclusion 2 :

> La vitesse d'un satellite est indépendante de la masse du satellite. Elle dépend par contre de la masse de l'astre central et de la distance du satellite par rapport au centre de cet astre. Plus l'altitude z sera élevée, plus la vitesse du satellite sera faible.

f) Période de révolution T

La période de révolution T est la durée de temps Δt que met le satellite pour effectuer avec une vitesse v (ici constante) un tour complet sur sa trajectoire (ici périmètre du cercle).

La distance parcourue vaut : $\Delta s = 2\pi\, r = 2\pi\,(R+z)$ et la vitesse $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$

Ainsi : $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(R+z)}{v}$$

Finalement : $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+z)^3}{KM}} = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+z)^3}{G_0}}}$$

g) Cas particulier : satellite géostationnaire

Pour un satellite terrestre tournant **dans le plan de l'équateur**, on peut calculer l'altitude z pour que T = 23 h 56 min 4 s (période de rotation terrestre : T = **1 jour sidéral**). Dans ce cas, la période de révolution du satellite est égale à la période de rotation de la Terre. Alors le satellite reste toujours à la verticale d'un point de l'équateur et paraît donc immobile dans le référentiel terrestre. Le satellite est dit géostationnaire.

$$R + z = \sqrt[3]{\frac{T^2 R^2 G_0}{4\pi^2}} = 4{,}22 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

$$z = \left(4{,}22 \cdot 10^7 - 6{,}4 \cdot 10^6\right)\mathrm{m} = 3{,}58 \cdot 10^7\,\mathrm{m}$$

On trouve pour l'altitude du satellite à peu près z = 36 000 km.

Pourquoi n'y a-t-il pas de satellite géostationnaire placé à la verticale de Luxembourg ? (Quel doit être le centre de sa trajectoire circulaire ?)

h) La troisième loi de Kepler est valable pour les satellites

Elevons la relation précédente (f) au carré :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(R+z)^3}{KM} = 4\pi^2 \frac{r^3}{KM} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM} = \text{constante (car K et M sont constants)}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(R+z)^3}{R^2 G_o} = 4\pi^2 \frac{r^3}{R^2 G_o} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{R^2 G_0} = \text{constante (car R et } G_0 \text{ sont const.)}$$

Le carré de la période de révolution d'un satellite est proportionnel au cube du rayon de son orbite circulaire : $T^2 \sim r^3$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire le rayon r est équivalent au demi-grand axe a.

On retrouve ainsi la 3e loi de Kepler : $T^2 \sim a^3$ (voir p 28).

Cette formule est utilisée en astronomie pour déterminer la masse M d'un astre à partir de la période de révolution T de son satellite.