Chapitre 4: Mouvement d'une particule soumise à une force centrale. Champ magnétique

1. Force de Lorentz

a) Définition

Une charge q qui se **déplace** avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur $\vec{B}$ subit une force magnétique appelée **force de Lorentz** $\vec{f}_m$ donnée par :

$$\boxed{\vec{f_m} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

$\vec{f}_m$ est le **produit vectoriel** de $q\,\vec{v}$ par $\vec{B}$.

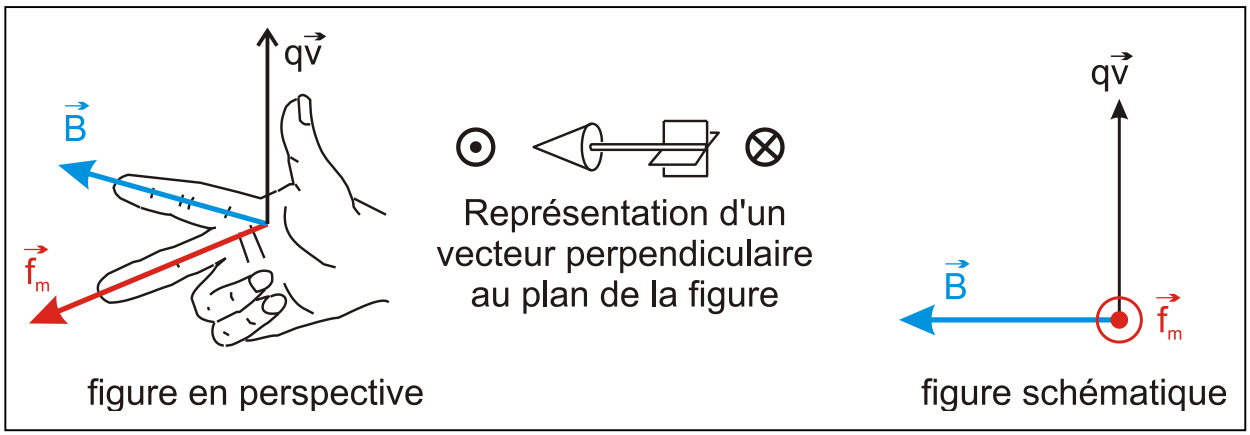
b) Caractéristiques de la force de Lorentz

direction : perpendiculaire au plan formé par $q\vec{v}$ et $\vec{B}$

sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite (cf. figure)

norme : $\boxed{f_m = |qvB\sin\alpha|}$

avec : q est la charge (C)
v est la vitesse de la charge (m/s)
B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T)
α est l'angle formé par $q\vec{v}$ et $\vec{B}$.

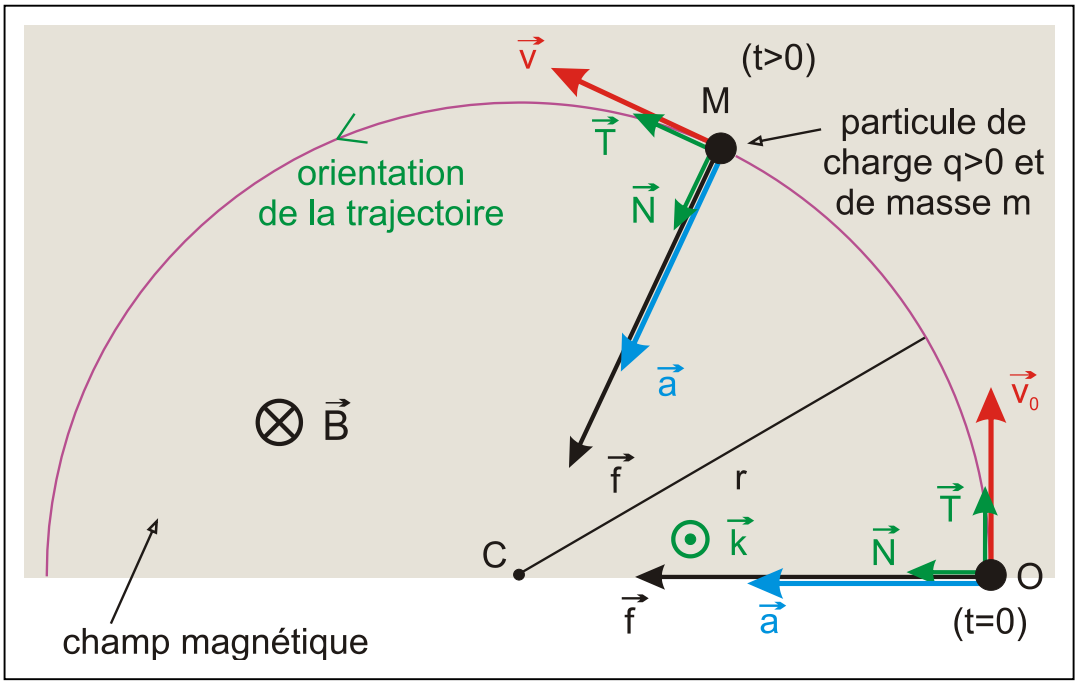


c) Attention

Si $q < 0$ alors $q\,\vec{v}$ est de sens opposé à la vitesse $\vec{v}$!

2. Etude cinématique dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique

Données : A l'instant initial t = 0, une particule de masse m et de charge électrique q pénètre avec la vitesse $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On suppose que $\vec{v}_0$ est perpendiculaire à $\vec{B}$.



Nous étudions le mouvement de la particule à l'intérieur du champ uniquement.

a) Système. Référentiel. Repère

Le système est la particule chargée.

Le référentiel est celui du dispositif qui crée le champ magnétique (par exemple deux bobines de Helmholtz).

Le repère est celui de Frenet ($\vec{T}$, $\vec{N}$) lié à la particule, auquel on ajoute le vecteur unitaire $\vec{k}$ fixe et perpendiculaire au plan formé par $\vec{T}$ et $\vec{N}$ à l'instant t = 0.

b) Conditions initiales

t = 0 ⇒ particule en O (origine de la trajectoire curviligne)

vitesse = v_0 parallèle à $\vec{T}$ ⇒ $v_{0k} = 0$

c) Forces extérieures

Force de Lorentz : $\vec{f_m} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

Le poids $\vec{P}$ est négligeable devant $\vec{f}_m$.

Il n'y a pas de frottement car le mouvement se fait dans le vide.

d) Accélération

* Appliquons le principe fondamental de Newton (Newton II) :

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}$$

ici : $q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = m\,\vec{a}$

Ainsi : $\vec{a} = \frac{q\,\vec{v} \wedge \vec{B}}{m}$

* Projections sur les directions de $\vec{T}$, $\vec{N}$ et $\vec{k}$:

$a_T = 0$ (1)

$a_N = \frac{|q|\,v\,B\sin\alpha}{m}$ avec α = angle entre $q\vec{v}$ et $\vec{B}$; ici $\alpha = 90°$ et $\sin\alpha = 1$

ainsi : $a_N = \frac{|q|vB}{m}$ (2)

$a_k = 0$ (3)

e) Vitesse et position

En cinématique (p11) on a vu que dans le repère de Frenet, l'accélération d'un mouvement curviligne quelconque s'écrit :

$$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N} = \frac{dv_T}{dt} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N}$$

* (1): $a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0 \Rightarrow v_T = v = \text{constant}$!

Conclusion : Le mouvement est uniforme.

* (3): $a_k = \frac{dv_k}{dt} = 0 \Rightarrow v_k = \text{constant} = v_{0k} = 0$

Donc il n'y a pas de mouvement suivant $\vec{k}$!

Conclusion : Le mouvement est plan. Il s'effectue dans un plan perpendiculaire à $\vec{B}$ contenant la vitesse initiale $\vec{v_0}$.

* Comme la coordonnée normale de l'accélération s'écrit toujours : $a_N = \frac{v^2}{r}$ (r = rayon du cercle tangent), on a grâce à (2) :

$\frac{v^2}{r} = \frac{|q|vB}{m} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{mv}{|q|B}$ m, v, q et B sont constants $\Rightarrow$ r est constant !

Conclusion : Le mouvement est circulaire.

f) Conclusion générale : nature du mouvement

Une particule chargée entrant dans un champ magnétique avec une vitesse perpendiculaire au champ décrit un mouvement circulaire et uniforme dans un plan perpendiculaire au champ.

Le rayon de la trajectoire est donné par l'expression : $\boxed{r = \frac{mv}{|q|B}}$ (4)

g) Vitesse linéaire, vitesse angulaire, période, fréquence

La vitesse linéaire de la particule se déduit de (4) : $v = \frac{|q|Br}{m}$

La vitesse angulaire est reliée à la vitesse linéaire par $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = \frac{|q|B}{m}$

La période est reliée à la vitesse angulaire par $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\frac{m}{|q|B}$

La fréquence est reliée à la période par $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\frac{|q|B}{m}$

Les expressions montrent que ω, T et f sont indépendants du rayon r et de la vitesse v.

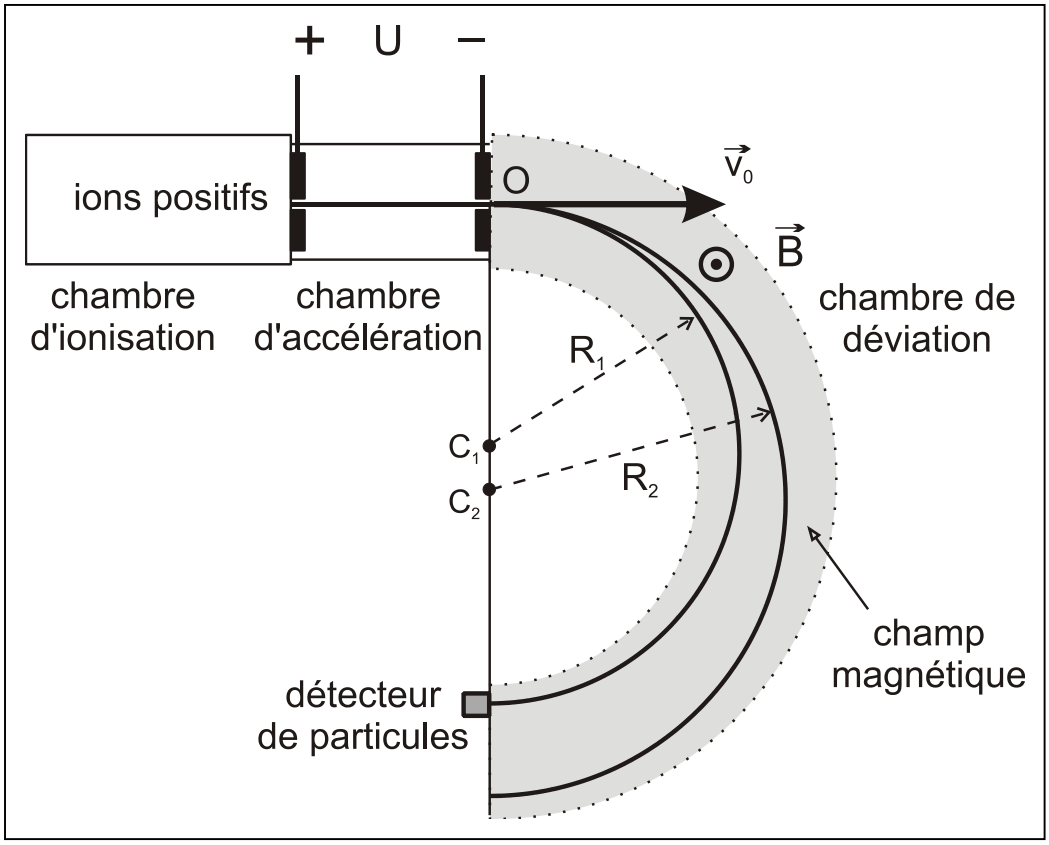
h) Remarques importantes

1) La force de Lorentz $\vec{f}_m$ est centripète. C'est elle qui est à l'origine du mouvement circulaire et uniforme !
2) Si $\vec{v}_0$ est parallèle à $\vec{B}$ la force de Lorentz est nulle et la particule décrit un mouvement rectiligne et uniforme à travers le champ (Newton I).
3) Si l'angle entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ est différent de 0° et de 90°, la particule décrit un mouvement uniforme hélicoïdal (trajectoire = hélice).

3. Applications

a) Spectrographe de masse

Le spectrographe de masse sert à séparer les isotopes d'un même élément. Il est formé de trois chambres où règne un vide très poussé.



* **Chambres d'ionisation** : On y produit des ions de même charge q mais de masses m_1 et m_2 différentes.

* **Chambre d'accélération** : A travers une première fente, les ions pénètrent dans cette chambre avec une vitesse négligeable. Ils sont accélérés par la tension U > 0 et sortent avec une vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}} \qquad (5)$$

* **Chambre de déviation** : Les ions sont déviés par un champ magnétique $\vec{B}$ et ont pour trajectoire des demi-cercles dont les rayons R_1 et R_2 dépendent des masses m_1 et m_2.

(4) et (5) $\Rightarrow$ $R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}}$ et $R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{|q|}}$

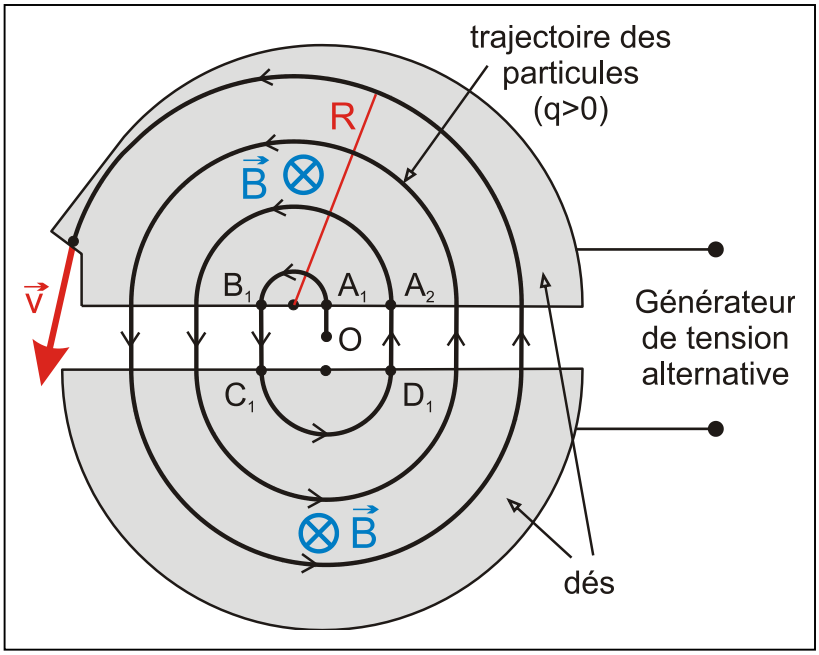
Le rayon de la trajectoire augmente avec la masse.

On arrive ainsi à recueillir sur le détecteur des particules de même masse ; la position du détecteur permet de déterminer le rayon R de la trajectoire. Connaissant la charge q, on détermine la masse m de la particule.

b) Le cyclotron (Découverte en 1929 par E. O. LAWRENCE aux USA)

Un cyclotron est un **accélérateur de particules chargées**. Il comporte deux électrodes creuses (des demi-cylindres plats) en forme de la lettre "D", les "dee" (en anglais) ou "dés" (en français), entre lesquelles est appliquée une tension alternative. Les deux "dés" baignent dans un champ magnétique uniforme.

En son centre (point O) se trouve une source qui injecte des particules chargées : protons, deutons (= particules formées d'un proton et d'un neutron), particules alpha (= particules formées par 2 protons et 2 neutrons),...



Ces particules sont accélérées vers le "dé" supérieur, où elles arrivent en A_1 avec une vitesse v_{A1}. Elles décrivent alors avec la vitesse v_{A1} constante un demi-cercle. Au moment précis où elles s'apprêtent à sortir du dé (point B_1), la tension appliquée entre les deux "dés" a changé de signe : les particules sont accélérées vers le "dé" inférieur (entre B_1 et C_1) : sa nouvelle vitesse est $v_{C1} > v_{A1}$. Dans le "dé" inférieur les particules décrivent aussi un demi-cercle, de rayon supérieur au précédent, avec la vitesse v_{C1} constante. Lorsqu'elles sortent (point D_1) la polarité des "dés" a encore changé : les particules sont accélérées vers le "dé" supérieur (entre D_1 et A_2) et entrent dans ce "dé" avec la vitesse $v_{A2} > v_{C1}$.

A chaque traversée de l'intervalle entre les "dés", la tension appliquée accélère les particules. Lorsque les particules sont à l'intérieur des "dés", elles décrivent des demi-cercles avec des vitesses de plus en plus grandes, et donc avec des rayons de plus en plus grands.

La durée de parcours des demi-cercles est constante, égale à la demi-période : $\frac{T}{2} = \pi \frac{m}{|q|B}$

La fréquence du générateur doit donc correspondre exactement à la fréquence constante des particules en mouvement circulaire. (On néglige les durées de parcours entre les dés.)

Après avoir tourné quelques centaines de tours, les particules arrivent à la périphérie des "dés" (rayon R) et sortent tangentiellement à la trajectoire avec la vitesse v. Elles peuvent alors être utilisées comme projectiles corpusculaires de haute énergie.

Vitesse : $v = \frac{|q|BR}{m}$

Energie cinétique des particules : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2R^2}{m}$