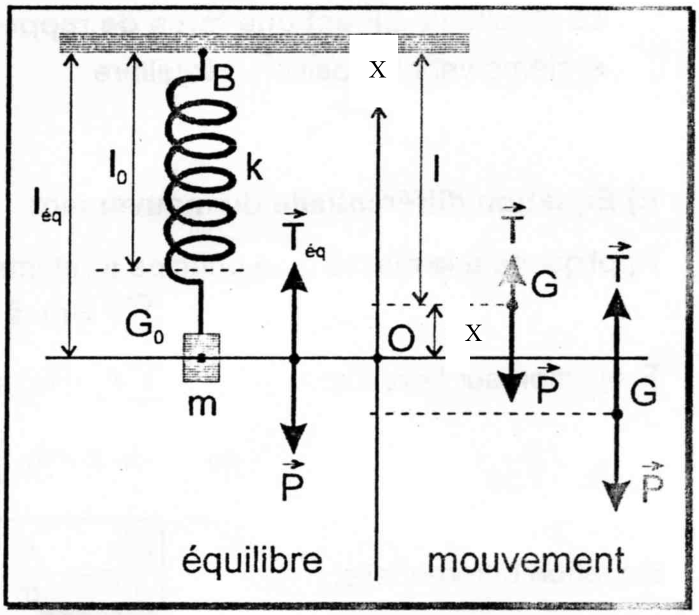
TP 2 : Oscillation mécaniques harmoniques: L'oscillateur élastique harmonique vertical

1) Considérations théoriques



Le **système** étudié est composé d'un corps solide de masse m suspendu à un ressort hélicoïdal de constante de raideur k ayant une masse $m_{ressort}$ et étant suspendu à un point fixe B. On déplace le corps verticalement de sa position d'équilibre G_0 vers la position G, et on le lâche, sans vitesse initiale. Il effectue des oscillations libres de translation verticale étudiées dans le **référentiel terrestre**.

Concernant les **forces extérieures**, en première approximation, nous négligeons les actions de freinage produites par l'air. De même, nous négligeons dans un premier temps la masse du ressort $m_{ressort}$ devant la masse du corps accroché m.

Le corps de masse m est soumis à son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ et à la tension $\vec{T}$ du ressort. Si la longueur initiale du ressort (sans masse accrochée) vaut l_0 et sa longueur actuelle vaut l, la composante de la tension selon Ox vaut: $T_x = k \cdot (l - l_0)$.

* Le corps est donc en **équilibre** si le centre d'inertie G est en G_0 sur la verticale de B et que le poids et la tension s'équilibrent : $m \cdot \vec{g} + \vec{T} = \vec{0}$.

Projetons cette relation sur l'axe vertical Ox orienté vers le haut, et dont l'origine O se trouve au niveau de G_0.
La longueur du ressort à l'équilibre est notée $l_{éq}$ de sorte que l'allongement du ressort vaut à l'équilibre $l_{éq} - l_0$. On obtient ainsi : $-m\,g + k\,(l_{éq} - l_0) = 0$.

* A un instant t quelconque du mouvement, le système se trouve **hors de sa position d'équilibre** en un point G à une position x. La longueur du ressort s'écrit dans tous les cas (G au-dessus ou au-dessous de G_0) : $l = l_{éq} - x$.

La tension du ressort à comme composante selon Ox : $T_x = k\,(l_{éq} - x - l_0)$.

Hors de la position d'équilibre, la résultante du poids et de la tension n'est pas nulle. Sa composante selon Ox vaut :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= k\,(l_{éq} - x - l_0) - m\,g \\ &= -k\,x + k\,(l_{éq} - l_0) - mg \\ &= -\,k\,x.\end{aligned}$$

En appliquant le **principe fondamental de Newton** : $\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}$ et en décomposant selon l'axe Ox, on obtient : $-k\,x = m\,a_x$

Respectivement : $-\,k\,x = m\,\frac{d^2x}{dt^2}$,

Ce qui donne l'équation différentielle : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ identique que celle de l'oscillateur élastique horizontal.

Au cours, nous montrons qu'une **solution** possible de cette équation est la fonction :

$$x = X_m \cos(\omega_0\, t + \varphi),$$

où X_m représente l'amplitude d'oscillation et φ la phase initiale, qui sont des facteurs constants dépendant des conditions initiales de lancement ;

et où ω_0 est la **pulsation propre de l'oscillation** qui vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

On en déduit que la **période propre d'oscillation** T_0 vaut : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

En réalité la **masse du ressort n'est pas négligeable** et il faut tenir compte de ses effets d'inertie.

* On distingue le cas ou l'espacement entre les spires est constant le long du ressort. On peut ainsi négliger l'allongement du ressort dû à son propre poids vis-à-vis de l'allongement produit par la masse accrochée. Nous traiterons de cette manière des ressorts dont la masse est largement inférieure à la masse accrochée.

Une étude mathématique permet de trouver que dans la relation de la période propre, la masse m doit être remplacée par $m + \frac{1}{3}m_{ressort}$ et on aura : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_{ressort}}{k}}$.

On traitera de cette manière le <u>grand ressort rouge</u> et le <u>petit ressort noir</u>.

* Dans le cas où l'espacement entre les spires augmente linéairement d'une spire à l'autre du haut vers le bas, on peut montrer que la masse m doit être remplacée par $m + 0{,}512\,m_{ressort}$ et on trouve : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m + 0{,}512 \cdot m_{ressort}}{k}}$.

On traitera de cette manière le <u>ressort « Slinky</u> ».

2) Mesures

1) A l'aide du Slinky, vérifions que la période propre T_0 est indépendante de l'amplitude d'oscillation X_m. (Pour une masse accrochée de 50 g par exemple.)

Afin **d'améliorer la précision de mesure**, on mesure la durée de plusieurs oscillations (p.ex. 10) et on divise la durée par ce nombre pour trouver la période. Chaque manipulateur du groupe prend une mesure et on calcule la moyenne.

petite amplitude	moyenne amplitude	grande amplitude
$T_0 =$	$T_0 =$	$T_0 =$

2) Étudions maintenant la relation entre la période propre et la masse accrochée :

* ressort rouge de masse $m_{\text{ressort rouge}}$ = ...

masse m en g	500	450	400	350	300	250	200
Période T_0 en s							

* petit ressort noir: $m_{\text{ressort noir}}$ = ...

masse m en g	500	450	400	350	300	250	200
Période T_0 en s							

* Ressort « Slinky »: $m_{\text{ressort Slinky}}$ = ...

masse m en g	0	10	20	30	40	50	60
Période T_0 en s							

* Mesurer pour chaque ressort l'allongement produit en accrochant une masse et calculer la constante de raideur k par la loi de Hooke.

Ressort	Masse accrochée en g	Allongement	Constante de raideur
rouge	500		
noir	500		
Slinky	60		

3) Exploitation des résultats expérimentaux

Si on élève l'expression de la période propre au carré, on obtient :

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{k}m + \frac{4\pi^2\alpha \cdot m_{\text{ressort}}}{k}$$

où $\alpha = \frac{1}{3}$ pour les ressorts rouge et noir et α = 0,512 pour le Slinky.

1) En représentant le carré de la période propre T_0^2 en fonction de la masse accrochée m, on obtient donc une fonction affine de pente : $p = \frac{4\pi^2}{k}$

et d'ordonnée à l'origine : $oo = \frac{4\pi^2\alpha \cdot m_{\text{ressort}}}{k} = p \cdot \alpha \cdot m_{\text{resort}}$.

2) Ajuster les courbes et déterminer la pente p et l'ordonnée à l'origine oo pour les 3 ressorts avec leurs incertitudes absolues et relatives

3) En déduire les valeurs de la constante de raideur des ressorts ainsi que de la masse des ressorts à partir de la pente p et de l'ordonnée à l'origine oo.

4) Comparer ces valeurs aux valeurs obtenues par les mesures directes (balance et mesures d'allongement). Afin de comparer les deux mesures on calcule l'écart relatif : écart relatif = différence entre les deux valeurs divisée par la valeur théorique (respectivement la plus petite des valeurs expérimentales) multiplié par 100 et exprimé en %.

5) Regrouper les valeurs expérimentales de la constante de raideur, de la masse du ressort et des écarts relatifs dans un tableau synoptique et conclure quant à la validité de la relation de la période propre.